Limites et continuité des fonctions numériques

Ce qu'il faut savoir :

Les fonctions usuelles sont les fonctions :
-valeur aboslue $x \mapsto |x|$
-partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$
-logarithmes $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$
-exponentielles $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$
-puissances $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ et $x \mapsto x^a = e^{a \ln x}$ $(a \in \mathbb{R})$
-trigonométriques $x \mapsto \tan x,\ x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$
-arctangente $x \mapsto \arctan x$
Pour toutes ces fonctions , il faut connaître les domaines de définition et de dérivabilité, la dérivée, le sens de variations et la représentation graphique

-la définition de la limite d'une fonction au voisinage de a fini ou infini
-la définition de la continuité d'une fonction f en un réel a, sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
-les équivalents usuels
-les comparaisons des fonctions usuelles
-déterminer un équivalent simple d'une fonction f au voisinage de a fini ou infini
-la définition du prolongement par continuité d'une fonction
-le théorème des valeurs intermédiaires

1. **Propriétés fondamentales**
   a. $|x| = a \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+$ et $x = \pm a$
   b. $\lfloor x \rfloor = k \Leftrightarrow k \in \mathbb{Z}$ et $k \leqslant x < k+1$
   c. $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$, impossible sinon
   $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$ si $a \in \mathbb{R}_+^*$, impossible sinon
   d. $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
   $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
   $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
   e. $\arctan x = a \Leftrightarrow x = \tan a$ si $a \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, impossible sinon
   $\arcsin x = a \Leftrightarrow x = \sin a$ si $a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, impossible sinon
   $\arccos x = a \Leftrightarrow x = \cos a$ si $a \in [0, \pi]$, impossible sinon

2. **Comment résoudre une équation ou une inéquation contenant des fonctions usuelles**
   a. déterminer le domaine de définition de l'équation ou de l'inéquation
   b. on peut se ramener à une équation de la forme $f(x) = 0$, factoriser f et dire qu'un produit de facteurs est nul si, et seulement, si l'un des facteurs est nul
   c. on peut se ramener à l'étude du signe d'une fonction f, factoriser f et dresser un tableau de signes du produit de facteurs
   d. on privilégie un raisonnement par équivalence, si on est obligé de procéder par implication, il faudra penser à vérifier que les solutions trouvées sont, ou non, solutions
   e. attention à ne jamais simplifier une équation ou inéquation par une expression qui peut s'annuler

3. **Comment prouver une égalité ou une inégalité de fonctions**
   a. pour montrer que $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$, on peut étudier $h(x) = f(x) - g(x)$ sur I
   b. pour montrer que $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant g(x)$ on peut étudier le signe de $h(x) = f(x) - g(x)$ sur I

4. **Comment montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a**
   a. on montre que les limites de f à gauche et à droite de a ne sont pas égales
   b. on construit une suite (u_n) qui tend vers a et telle que la suite $(f(u_n))$ diverge

5. Comment montrer qu'une fonction f admet une limite finie ou infinie en a

- **a.** on encadre f par deux fonctions g et h ayant même limite finie en a (théorème d'encadrement)
- **b.** on minore f par une fonction g qui tend vers $+\infty$ et on conclut que f tend vers $+\infty$
- **c.** on majore f par une fonction g qui tend vers $-\infty$ et on conclut que f tend vers $-\infty$
- **d.** on effectue le changement de variable $x = a + h$ et on montre que la fonction $g(h) = f(a + h)$ admet une limite quand h tend vers 0
- **e.** on montre que f admet des limites à droite et à gauche de a qui sont égales
- **f.** on montre que f est monotone et bornée au voisinage de a (mais on n'a pas la limite)
- **g.** on utilise les opérations sur les limites des fonctions usuelles
- **h.** on utilise un équivalent simple de f au voisinage de a

6. Comment lever une indétermination pour calculer une limite

- **a.** on utilise les équivalents usuels
- **b.** pour $+\infty - \infty$, on modifie l'expression de f (multiplication par la quantité conjuguée etc.)
- **c.** pour $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ ou $\infty \times 0$, on factorise par les termes prépondérants et on utilise les comparaisons des fonctions usuelles
- **d.** pour 1^{∞} ou $+\infty^{0}$ on l'écrit sous forme exponentielle et on étudie la limite de l'exposant

7. Comment trouver un équivalent simple de f au voisinage de a, fini ou infini

- **a.** si a est fini, on pose $x = a + h$ et on cherche un équivalent de $g(h) = f(a + h)$ en 0
- **b.** si a est infini, on pose $x = \dfrac{1}{t}$ et on cherche un équivalent de $g(t) = f(\dfrac{1}{t})$ en 0
- **c.** on utilise les équivalents usuels et les règles de calculs des équivalents (ni somme ni différence)
- **d.** on utilise le premier terme non nul du DL(a) de f
- **e.** si $f = g + h$, on montre que $h = \circ(g)$ et dans ce cas, $f \sim g$

8. Comment prolonger par continuité une fonction f en un point a

on montre que f admet une limite finie ℓ en a et on pose $f(a) = \ell$

9. Comment montrer que f est continue sur un intervalle I

- **a.** on décompose f comme somme, produit, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions continues sur I
- **b.** on écrit $f = h \circ g$ où g est continue de I sur J et h est continue sur J
- **c.** on remarque que f est la bijection réciproque d'une fonction bijective et continue de J sur I

10. Comment montrer que f est bijective de I sur J

- **a.** on montre que f est continue sur I, strictement monotone sur I et que $f(I) = J$
- **b.** on montre que pour tout x de I et pour tout y de J, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution
- **c.** on cherche une fonction g telle que $\forall x \in I,\ \forall y \in J,\ y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$, dans ce cas $f^{-1} = g$

11. Comment étudier l'existence dans I de solution à l'équation $f(x) = d$

- **a.** on montre que f est continue sur I et que $d \in f(I)$ (théorème des valeurs intermédiaires)
- **b.** si on veut l'existence et l'unicité, on montre que f est bijective de I sur J et que $d \in J$