Équations différentielles linéaires

Ce qu'il faut connaître :
-Les primitives usuelles et les méthodes de détermination de primitives
-Le principe de superposition
-La structure de l'ensemble des solutions (somme d'une solution de (H) et d'une solution particulière)
-La résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène (H_1)
-La méthode de la variation de la constante pour la recherche d'une solution particulière
-La résolution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants homogène (H_2)
-La forme d'une solution particulière selon la forme du second membre

Équations différentielles linéaires du premier ordre

1. **Comment résoudre une équation** (H) **de la forme** : $y' + a(t)y = 0$ sur un intervalle I
- **a.** Si a est constante, on conclut directement : les solutions sont les fonctions : $t \mapsto Ce^{-at},\ C \in \mathbb{R}$
- **b.** -On vérifie que a est une fonction continue sur I
  -On détermine une primitive A de a sur I
  -On conclut : les solutions sont les fonctions : $t \mapsto Ce^{-A(t)},\ C \in \mathbb{R}$
  ou l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto Ce^{-A(t)}, C \in \mathbb{R}\}$

2. **Comment résoudre une équation** (E) **de la forme** : $y' + a(t)y = f(t)$ sur un intervalle I
-On résout l'équation homogène associée $(H)\ :\ y' + a(t)y = 0$ (cf **1.**)
-On vérifie que b est une fonction continue sur I
-On cherche une solution particulière y_P de l'équation (E) de la manière suivante :
- **a.** On observe bien l'équation au cas où il y aurait une solution particulière évidente
- **b.** On utilise celle qui aurait été proposée dans une question précédente (solution polynomiale etc.)
- **c.** Sinon, on utilise la méthode de variation de la constante : on la cherche sous la forme $y_p(t) = C(t)e^{-A(t)}$ où C est une fonction dérivable sur I que l'on détermine en y_p et y'_p dans (E)
- **d.** Si $f(t) = \sum f_i(t)$ alors on cherche une solution particulière y_{p_i} de $y' + a(t)y = f_i(t)$
  Une solution particulière de (E) est $y_p = \sum y_{p_i}$ (principe de superposition)

-On conclut : les solutions sont les fonctions : $t \mapsto y_p(t) + Ce^{-A(t)},\ C \in \mathbb{R}$
ou l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto Ce^{-A(t)}, C \in \mathbb{R}\}$

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

3. **Comment résoudre une équation** (H) **de la forme** : $ay'' + by' + cy = 0$ **sur** $\mathbb{R}$ **où** $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
-Si a dépend d'un paramètre, il faut distinguer les cas éventuels ou $a = 0$ (cf **1a.**)
-On vérifie que $a \neq 0$ et on résout l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$: $ax^2 + bx + c = 0$
-On conclut selon les cas :
Si $b^2 - 4ac > 0$, $(\mathcal{C})$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2
les solutions de (H) sont les fonctions : $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
ou l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$
Si $b^2 - 4ac = 0$, $(\mathcal{C})$ admet une unique racine réelle r_0
les solutions de (H) sont les fonctions : $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
ou l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$
Si $b^2 - 4ac < 0$, $(\mathcal{C})$ admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$
les solutions de (H) sont les fonctions : $t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$
ou l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_H = \{y : t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

4. Comment résoudre une équation (E) de la forme : $ay'' + by' + cy = f(t)$ **sur** $\mathbb{R}$
où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ **et** f **est une fonction sur** $\mathbb{R}$

-On cherche les solutions y_H de l'équation homogène associée $(H) : ay'' + by' + cy = 0$ (cf **3.**)

-On cherche une solution particulière y_P de l'équation (E)

- **a.** On observe bien l'équation au cas où il y aurait une solution particulière évidente
- **b.** On utilise celle qui aurait été proposée dans une question précédente
- **c.** Si $f(t) = P(t)e^{mt}$, on cherche y_p sous la forme
  $y_p(t) = t^\alpha Q(t)e^{mt}$ où α est la multiplicité de m dans l'équation caractéristique $(\mathcal{C})$
  et Q est un polynôme de même degré que P dont on détermine les coefficients par identification
- **d.** Si $f(t) = e^{mt}\cos(pt) = \mathcal{R}e(e^{((m+ip)t})$ (resp. $e^{mt}\sin(\alpha t) = \mathcal{I}m(e^{((m+ip)t}))$
  On cherche une solution particulière z_p de l'équation $ay'' + by' + cy = e^{((m+ip)t}$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$)
  Une solution particulière de (E) est $y_p = \mathcal{R}e(z_p)$ (resp. $y_p = \mathcal{I}m(z_p)$)
- **e.** Si $f(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ où $A,\ B$ et ω sont des constantes réelles
  On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_p(t) = t^\alpha(\lambda\sin(\omega t) + \mu\cos(\omega t))$
  où α est la multiplicité de $i\omega$ dans l'équation $(\mathcal{C})$, λ et μ sont des constantes réelles à déterminer
- **f.** Si $f(t) = \sum f_i(t)$ où les f_i sont de l'une des formes précédentes
  alors on cherche une solution particulière y_{p_i} de $ay'' + by' + cy = f_i(t)$
  Une solution particulière de (E) est $y_p = \sum y_{p_i}$ (principe de superposition)

-On conclut : les solutions sont les fonctions : $t \mapsto y_p(t) + y_H(t)$

Dans les autres cas

5. Que faire quand on nous propose un changement de fonction $z = \varphi(y)$
dans une équation différentielle (E) **de fonction inconnue** y **de la variable** t

-On justifie que φ est bijective puis on détermine $y = \varphi^{-1}(z)$
-On détermine les dérivées successives de y en fonction de celles de z
-En remplaçant les dérivées de y dans (E), on détermine l'équation (E')
telle que : y est solution de $(E) \iff z$ est solution de (E')
(E') doit être une équation que l'on sait résoudre
-On détermine les fonctions z solutions de l'équation (E')
-On conclut en calculant $y = \varphi^{-1}(z)$

6. Que faire quand on nous propose un changement de variable $t = \varphi(x)$
dans une équation différentielle (E) **de fonction inconnue** y **de la variable** t

-On pose le changement de fonction inconnue $z(x) = y(\varphi(x))$
-En dérivant la composée $y \circ \varphi$, on détermine les dérivées $y'(t), y''(t)$ en fonction de $z(x), z'(x), z''(x)$
-En remplaçant $y(t),\ y'(t)$ et $y''(t)$ dans (E), on détermine l'équation (E')
telle que : y est solution de $(E) \iff z$ est solution de (E')
(E') de fonction inconnue z de la variable x doit être une équation que l'on sait résoudre
-On détermine les fonctions z solutions de l'équation (E')
-On conclut en calculant $y(t) = z(\varphi^{-1}(t))$