

TD : RÉVISIONS

[1] On introduit les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}, \quad z_2 = 1 + i \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{z_2}{z_1}.$$

1. Écrire ces complexes sous forme trigonométrique.
2. (a) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
- (b) En déduire également $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

[2] Soit $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

1. Calculer u^2 , u^4 .
2. Soit θ un argument de u . Donner le signe de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$.
3. En déduire une représentation exponentielle de u .
4. Donner la valeur exacte de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

[3] Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Écrire $(1 + i)^n$ sous forme exponentielle. En déduire une écriture sous forme exponentielle de $(1 - i)^n$.
2. Vérifier alors que :

$$\frac{(1 + i)^n - (1 - i)^n}{i} = 2^{\frac{n+2}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

[4] On considère le nombre complexe z suivant :

$$z = \sqrt{2} \frac{(\sqrt{2} - 1) + i(\sqrt{2} + 1)}{i + \sqrt{2}}.$$

1. Donner une représentation exponentielle de z .
2. Trouver les entiers $n \in \mathbf{N}$ tels que z^n est un réel.
3. Trouver les entiers $n \in \mathbf{N}$ tels que z^n est un imaginaire pur.

[5] Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation :

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0.$$

[6] Soit n un entier naturel et θ un réel.

1. Factoriser $1 + e^{i\theta}$ par $e^{i\frac{\theta}{2}}$.
2. On pose $C = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Calculer $C + iS$ et en déduire les valeurs de C et S .

[7] Les fonctions suivantes (éventuellement prolongées par continuité) sont-elles dérivables sur $\mathbf{R}$?

1. $f(x) = x|x|$
2. $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

8 Soit $n \in \mathbf{N}$. On considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \sin^n\left(\frac{\pi}{2}x\right) \frac{\ln x}{\sqrt{x}-1}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe de f_n dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_n$ de f_n .
2. Justifier que f_n est continue sur $\mathcal{D}_n$.
3. Peut-on prolonger f_n par continuité en 1 ?
4. (a) Étudier en fonction de n la limite de f_n en 0.
(b) En déduire pour quelles valeurs de n la fonction f_n est prolongeable par continuité en 0.
5. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$. Quelle propriété peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_n$?

9 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x-1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
(b) Montrer que la fonction f est continue en tout point de $\mathcal{D}_f$.
(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$ et calculer f' .
2. *Etude en 0.*
(a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f la fonction ainsi prolongée.
(b) Étudier la dérivabilité de f en 0. La courbe représentative de f admet-elle une tangente au point d'abscisse en 0 ? Si oui, préciser son équation.
3. *Etude en 1.*
(a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 1. On note toujours f la fonction ainsi prolongée.
(b) Déterminer un développement limité de f en 1 à l'ordre 2.
(c) En déduire que f est dérivable en 1 et préciser $f'(1)$.
(d) Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 et discuter la position relative de $\mathcal{C}_f$ et T au voisinage de 1.
4. *Variations - courbe représentative.*
(a) Préciser la limite de f en $+\infty$.
(b) Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \ln x \leq x - 1$.
(c) Établir un tableau de variations complet de f sur $\mathbf{R}_+$.
(d) Représenter $\mathcal{C}_f$ en utilisant toutes les informations trouvées précédemment.
5. *Fonction réciproque de f .*
(a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur un ensemble à préciser.
(b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et calculer $(f^{-1})'(1)$.
(c) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0.
Indication : on pourra écrire le taux d'accroissement de f^{-1} en 0 à l'aide de celui de f en 0.
(d) Représenter la courbe représentative de f^{-1} sur le même graphique que $\mathcal{C}_f$.