DM2	Fonction définie par une intégrale

pour lundi 23 septembre

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-x(1+t^2))}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $f(0)$.

3. **a.** Programmer en Python la fonction g d'arguments deux flottants x et t qui renvoie $\dfrac{\exp(-x(1+t^2))}{1+t^2}$.

b. Utiliser la méthode des rectangles pour écrire une fonction Python *val_approx_f* d'arguments un flottant x et un entier n qui renvoie une valeur approchée de $f(x)$ en subdivisant l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles de largeurs égales.

c. Représenter sous Python la fonction f sur l'intervalle $[-5,5]$.
Émettre alors des conjectures quant au sens de variations et aux limites de la fonction f.

d. Utiliser la fonction du **b**. pour donner une valeur approchée de π. On choisira $n = 10^6$.

4. **a.** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-2x}\dfrac{\pi}{4} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}\dfrac{\pi}{4}$.

b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. Étudier de même la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

5. On admet que f est dérivable et que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -e^{-x}\displaystyle\int_0^1 e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

b. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x^2) + \left(\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2$

Étudier la dérivabilité de la fonction h et donner l'expression de $h'(x)$ sur son ensemble de dérivabilité.

6. Déduire de la question **5**. que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.