Corrigé du DM 1 : Complexes - Fonctions

Exercice 1 : Complexes

1. (a)

```python
import numpy as np

def module(a,b):
    return np.sqrt(a**2+b**2)
```

   (b) On remarque que le module de z est le quotient des modules de u et v qui sont écrits sous forme algébrique.

```python
def moduleZ(theta):
    modU = module(1 + np.cos(theta), np.sin(theta))
    modV = module(np.sqrt(1+np.sin(2*theta)),np.sqrt(1-np.sin(2*theta)))
    return modU / modV
```

2. ÉOn a : $-1 \leqslant \sin(2\theta) \leqslant 1$ donc $1+\sin(2\theta) \leqslant 0$ et $1-\sin(2\theta) \geqslant 0$, donc v est bien défini.
De plus,
$$v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1+\sin(2\theta) = 0 \quad \text{et} \quad 1-\sin(2\theta)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2\theta) = -1 \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 1.$$
Le complexe v est donc non nul, si bien que le complexe z est bien défini.
$$\boxed{\text{Les complexes } v \text{ et } z \text{ sont bien définis.}}$$

3. On a :
$$u = 1+\cos\theta + i\sin\theta = 1 + \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}\right) \underset{\text{Euler}}{=} 2\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$$
D'autre part, pour $\theta \in [0,\pi[, \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$.
$$\boxed{\text{donc : l'écriture de } u \text{ sous forme exponentielle est } u = 2\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}.}$$

4. (a) En développant $(\sin\theta+\cos\theta)^2$ et en utilisant la formule de duplication de sin, on a bien :
$$(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1+\sin(2\theta).$$
$$\boxed{\text{Donc : } 1+\sin(2\theta) = (\sin\theta+\cos\theta)^2.}$$

   (b) On utilise la formule de Fresnel :
$$\sin\theta+\cos\theta = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right) = \sqrt{2}\left(\cos\theta\cos\tfrac{\pi}{4} + \sin\theta\sin\tfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \tfrac{\pi}{4}\right).$$
De la même manière, on montre que : $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$.
$$\boxed{\text{Donc : } \sin\theta+\cos\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta-\tfrac{\pi}{4}\right) \text{ et } \sin\theta-\cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta-\tfrac{\pi}{4}\right).}$$

   (c) Soit $x \in [0,\pi[$.
$$\begin{aligned}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{2}+2k\pi \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} \text{ avec égalité pour } x = \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$
De la même manière, pour $x\in[0,\pi[$: $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi$, avec égalité pour $x = \frac{\pi}{4}$.

x	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		π
$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$		$+$		$+$	0	$-$	
$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$		$-$	0	$+$		$+$	

   (d) En utilisant les résultats de la question 4, on a :
$$v = \sqrt{1+\sin(2\theta)} + i\sqrt{1-\sin(2\theta)} \underset{4.(a)}{=} \sqrt{(\cos\theta+\sin\theta)^2} + i\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2} \underset{4.(b)}{=} \sqrt{2\cos^2\left(\theta-\tfrac{\pi}{4}\right)} + i\sqrt{2\sin^2\left(\theta-\tfrac{\pi}{4}\right)}.$$
D'après la question précédente :
$$v = \begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) - i\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i(\theta-\frac{\pi}{4})} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i(\theta-\frac{\pi}{4})} & \text{si } \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} \\ -\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi}\,\mathrm{e}^{-i(\theta-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i(\frac{5\pi}{4}-\theta)} & \text{si } \frac{3\pi}{4} \leqslant x \end{cases}$$

5. En utilisant le résultat de la question 3.
$$z = \begin{cases} \dfrac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i(\theta-\frac{\pi}{4})}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i(\frac{3\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \\ \dfrac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i(-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} & \text{si } \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} \\ \dfrac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i(\frac{5\pi}{4}-\theta)}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{i(\frac{3\theta}{2}-\frac{5\pi}{4})} & \text{si } \frac{3\pi}{4} \leqslant x \end{cases}$$

Exercice 2 : Étude de fonction

1. Ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction f :
Soit $x\in\mathbb{R}$.
$$f \text{ est définie en } x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1-x \neq 0 \\ \dfrac{1+x}{1-x} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ (1+x)(1-x) > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\neq 1 \\ x^2 < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$
$$\boxed{\text{Donc } \mathscr{D} =]-1,1[.}$$

2. Montrons que f est impaire sur $\mathscr{D}$:
L'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f est symétrique par rapport à 0. De plus,
$$\forall x \in \mathscr{D}, \quad f(-x) = \left((-x)^2-1\right)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -(x^2-1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x).$$
$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est impaire.}}$$

3. (a) Continuité de f sur $[0,1[$:
La fonction f est continue sur son ensemble de définition en tant que produit de composées de fonctions continues.
$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est continue sur } [0,1[.}.$$

   (b) Prolongement de f par continuité au point 1 :
On calcule la limite de f en 1. C'est une forme indéterminée de type « $0\times\infty$ ». On recherche un équivalent en posant $x = 1-h$ avec $h>0$:
$$f(1-h) = \left((1-h)^2-1\right)\ln\left(\frac{1+(1-h)}{1-(1-h)}\right) = (-2h+h^2)\left(\ln(2-h)-\ln h\right) = (-2h+h^2)\times(-\ln h)\left[1-\frac{\ln(2-h)}{\ln h}\right].$$
Donc :
$$f(1-h) \sim_0 2h\ln h.$$
Par croissances comparées,
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{h\to0^+} f(1-h) = 0.$$

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est prolongeable par continuité en 1 en posant } f(1)=0.}$$

4. (a) Dérivabilité et dérivée de f sur $\mathscr{D}$:

La fonction f est le produit de composées de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition.
Donc f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et :

$$\forall x \in \mathscr{D}, \quad f'(x) = 2x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + (x^2-1)\times\frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\boxed{\text{Donc : } \forall x \in \mathscr{D},\ f'(x) = 2x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2.}$$

(b) Dérivabilité de f en 1 :

On pose $x = 1-h$, avec $h > 0$. On a montré que :

$$\frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \sim_0 -2\ln h \underset{h\to 0^+}{\to} +\infty$$

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en 1 et sa courbe présente en 1 une tangente verticale.}}$$

Remarque. On reprend ici l'équivalent trouvé à la question 3.(b). L'étude du taux d'accroissement en 1, sans changement de variable, permet également de conclure directement par opérations sur les limites.

5. (a) Variations de g sur $]0,1[$:

La fonction g est dérivable sur $]0,1[$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables, et :

$$\forall x \in]0,1[, \quad g'(x) = \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{2}{1-x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2(1-x^2)} > 0.$$

x	0		1
$g'(x)$	‖	$+$	‖
g	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

Les limites de g sont obtenues par opérations sur les limites.

(b) La fonction g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0,1[$.
Donc, elle réalise une bijection de $]0,1[$ dans $g(]0,1[) = \mathbb{R}$. Or $0 \in g(]0,1[)$.

$$\boxed{\text{Donc il existe un unique réel } a \in]0,1[\text{ tel que } g(a)=0.}$$

(c) Tableau de variations de la fonction f :

Par définition de g, f' est du signe de g sur $]0,1[$ et d'après la question 4.(a) $f'(0) = -2 < 0$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		a		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖
f	0	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	0

6. Tangente de f en 0 :

On effectue un développement limité de f au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) = (x^2-1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= (x^2-1)\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right] \\ &= (-1+x^2)\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-(-x)+\frac{(-x)^2}{2}-\frac{(-x)^3}{3}+o(x^3)\right] \\ &= (-1+x^2)(2x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)) \\ &= -2x+\frac{4}{3}x^3+o(x^3). \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{La courbe de } f \text{ admet une tangente d'équation } y=-2x \text{ au point d'abscisse 0.}}$

De plus,

$$f(x)+2x = \frac{4}{3}x^3+o(x^3) \sim_0 \frac{4}{3}x^3.$$

$$\boxed{\text{La courbe de } f \text{ est au-dessus de sa tangente à droite de 0 et au-dessous à gauche de 0.}}$$

Remarque. Dans cet exemple, un DL à l'ordre deux ne permet pas de conclure sur les positions relatives.

7. (a) Par définition du réel a, on a $g(a)=0$ c'est-à-dire :

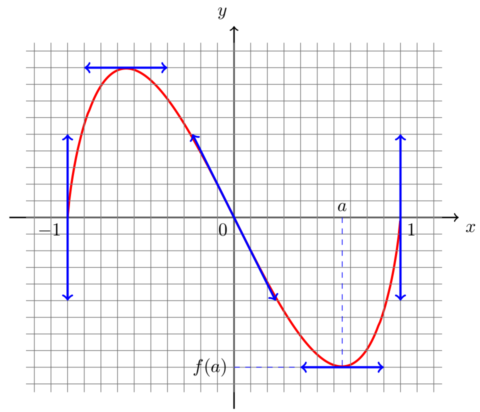
$$\ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right) = \frac{1}{a}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{f(a) = (a^2-1)\times\frac{1}{a} = a - \frac{1}{a}.}$$

(b) Courbe représentative de f sur $[-1,1]$:

On obtient la courbe sur $[-1,1]$ à partir de la courbe sur $[0,1]$ en effectuant une symétrie par rapport à l'origine.



$f(a) \simeq 0,6 - \frac{1}{0,6} = 0,6 - \frac{10}{6} \simeq 0,6 - 1,7 = -0,9.$