DM2 Corrigé

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{\exp(-x(1+t^2))}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-x(1+t^2))}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ existe. Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$.

2. En posant $x = 0$, on obtient $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0$ donc $\boxed{f(0) = \frac{\pi}{4}}$.

3. **a.** On utilise la fonction `exp` du module `math` (ou `numpy`) :

```
import math as m
def g(x,t):
    return m.exp(-x*(1+t**2))/(1+t**2)
```

.

b. On sait que, en posant $R_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(x, \frac{k}{n}\right)$, comme la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = \int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t = f(x)$. Ainsi, R_n est une valeur approchée de $f(x)$:

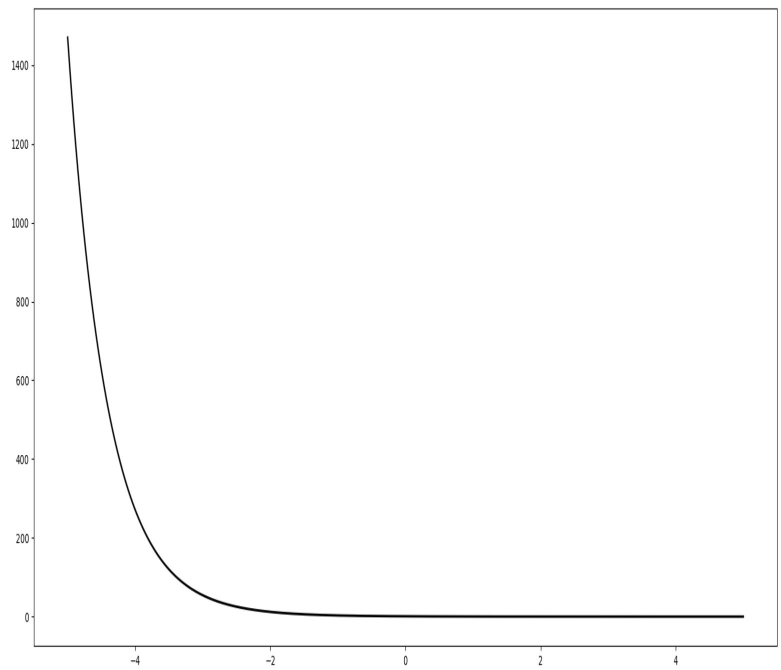
```
def val_appro_f(x,n):
    return sum([g(x,k/n) for k in range(n)])/n
```

.

c. On crée une liste Lx, subdivision de $[-5,5]$, et une liste Ly des valeurs de $f(x)$ correspondantes. Puis on utilise les fonctions `plot` et `show` du module `matplotlib.pyplot` :

```
import matplotlib.pyplot as plt
a,b = -5, 5
n = 1000
Lx = [a+k*(b-a)/n for k in range(n+1)]
Ly = [val_approx_f(x,n) for x in Lx]
plt.plot(Lx,Ly)
plt.show()
```

On obtient la courbe :



$\boxed{\text{On peut conjecturer que } f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R},\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

d. D'après **2.**, $f(0) = \frac{\pi}{4}$ donc $4f(0)$ est une valeur approchée de π. Ainsi, l'instruction

```
print(4*val_approx_f(0,10000))
```

fournit $\boxed{\text{une valeur approchée de } \pi \text{ égale à } 3,141593653589793}$

4. **a.** Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in \mathbb{R}^+, x \leqslant x(1+t^2) \leqslant 2x$ donc $-2x \leqslant x(1+t^2) \leqslant -x$

et, par coissance de la fonction exponentielle, $\frac{e^{-2x}}{1+t^2} \leqslant \frac{\exp(-x(1+t^2))}{1+t^2} \leqslant \frac{e^{-x}}{1+t^2}$.

Enfin, par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$, on obtient : $\int_0^1 \frac{e^{-2x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Comme $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$, on a bien : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^{-2x}\frac{\pi}{4} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}\frac{\pi}{4}}$.

b. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}\frac{\pi}{4} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\frac{\pi}{4} = 0$, par encadrement, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

Ce qui est cohérent avec la conjecture de **3c**.

c. On procède de la même manière : pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in \mathbb{R}^-, 2x \leqslant x(1+t^2) \leqslant x$

donc $\frac{e^{-x}}{1+t^2} \leqslant \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \frac{e^{-2x}}{1+t^2}$ et $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}^-,\ e^{-x}\frac{\pi}{4} \leqslant f(x) \leqslant e^{-2x}\frac{\pi}{4}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\frac{\pi}{4} = +\infty$, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

Ce qui est cohérent avec la conjecture de **3c**.

5. On admet que f est dérivable et que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -e^{-x}\int_0^1 e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$.

a. On effectue le changement de variable $u = xt$.

On a alors $\mathrm{d}u = x\mathrm{d}t$, $t = 0 \Leftrightarrow u = 0$ et $t = 1 \Leftrightarrow u = x$.

Ainsi $x\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-(xt)^2}x\,\mathrm{d}t$ d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ x\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u}$.

b. Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x^2) + \left(\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u\right)^2$.

Comme on admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition la fonction $x \mapsto f(x^2)$ l'est également.

On pose $\varphi(u) = e^{-u^2}$, la fonction φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive Φ sur $\mathbb{R}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Commme $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \Phi(x) - \Phi(0)$, la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par composition, la fonction $x \mapsto \left(\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u\right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $\boxed{h \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 2xf'(x^2) + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u$.

D'après **a.**, $h'(x) = -2\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u + 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u$. Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0}$.

6. Comme $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0$, la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\int_0^0 e^{-u^2}\mathrm{d}u = 0$, $h(0) = f(0) = \frac{\pi}{4}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{\pi}{4}$.

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u\right)^2 = \frac{\pi}{4} - f(x^2)$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{4} - f(x^2)}$ car $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x e^{-u^2}\mathrm{d}u \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive sur $[0,x]$ où $0 \leqslant x$).

D'après **4b.**, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \text{ existe et } \lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.