DM3	Équations différentielles

Pour lundi 11 octobre

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions f définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant l'équation :

$$(E)\ :\ xf' - |1-f| = 1.$$

1ère partie :

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_1)\ :\ xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_2)\ :\ xz' + z = 2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Sous Python, représenter sur un même schéma les courbes solutions de (E_1) et (E_2) vérifiant les conditions $y(2) = z(2) = 1$.

2ème partie :

Soit f une solution de (E).

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante.
2. Montrer que si la fonction f est minorée par 1 alors elle vérifie (E_1).
   Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. En déduire une contradiction.
3. Montrer que si la fonction f est majorée par 1 alors elle vérifie (E_2).
   Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. En déduire une contradiction.
4. **a.** Montrer qu'il existe un unique réel a tel que $f(a) = 1$.
   b. Déterminer l'expression de $f(x)$ sur $]0, a]$.
   c. Déterminer l'expression de $f(x)$ sur $[a, +\infty[$.
5. Vérifier que la fonction obtenue est solution de l'équation (E) et donner l'ensemble des solutions de (E).
6. Sous Python, représenter sur un même schéma les courbes solutions de (E) sur $]0, 10]$ pour $a \in \{0.5, 0.7, 1, 1.75, 5\}$.