Suites numériques

Ce qu'il faut connaître :

-la définiton du sens de variations d'une suite de nombres réels
-la définiton de suites majorées, suites minorées, suites bornées
-la définition de limite finie d'une suite de nombres réels ou complexes
-la définition de limite infinie d'une suite de nombres réels
-la définiton de suites convergentes, de suites divergentes
-la définiton de la convergence d'une suite de nombres réels
-la définiton de la convergence d'une suite de nombres complexes
-la définition de suites adjacentes
-la définition de suites équivalentes
-les suites équivalentes usuelles
-les comparaisons des suites $(\ln^a n)$, (n^b), (c^n) et $(n!)$
-la définition d'une suite arithmétique, terme général, convergence et somme de termes consécutifs
-la définition d'une suite géométrique, terme général, convergence et somme de termes consécutifs
-la définition d'une suite arithmético-géométrique, la méthode pour en trouver le terme général
-la définition d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, le terme général selon les cas
-le théorème des gendarmes (ou d'encadrement)
-le théorème de convergence monotone
-le théorème sur les suites adjacentes
-le théorème sur les suites extraites des termes de rangs pairs et impairs

1. **Comment montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique**
   a. pour tout n, on calcule $u_{n+1} - u_n$ et on montre que sa valeur est constante (ne dépend pas de n)
   b. pour tout n, on montre que u_n s'écrit sous la forme $u_n = a + nb$ (dans ce cas $u_0 = a$ et $r = b$)

2. **Comment montrer qu'une suite (u_n) est géométrique**
   a. pour tout n, on exprime u_{n+1} en fonction de u_n, on vérifie que $u_{n+1} = qu_n$ (q ne dépend pas de n)
   b. pour tout n, $u_n \neq 0$, on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, on montre que sa valeur est constante (ne dépend pas de n)
   c. pour tout n, on montre que u_n s'écrit sous la forme $u_n = ab^n$ (dans ce cas $u_0 = a$ et $q = b$)

3. **Comment montrer qu'une suite (u_n) est convergente**
   a. on calcule sa limite, si elle est finie alors (u_n) converge
   b. on l'encadre par deux suites convergentes vers une même limite (théorème d'encadrement)
   c. on montre qu'elle est croissante majorée ou décroissante minorée (th de convergence monotone)
   d. on montre qu'elle est équivalente à une suite convergente
   e. on montre que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite (par ex, si elles sont adjacentes)

4. **Comment montrer qu'une suite (u_n) est divergente**
   a. on calcule sa limite, si elle est infinie ou si (u_n) n'admet pas de limite alors (u_n) diverge
   b. on la minore par une suite qui tend vers $+\infty$ (dans ce cas, (u_n) tend aussi vers $+\infty$)
   c. on la majore par une suite qui tend vers $-\infty$ (dans ce cas, (u_n) tend aussi vers $-\infty$)
   d. on montre qu'elle est équivalente à une suite divergente
   e. on montre que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers des limites différentes ou que l'une n'a pas de limite

5. **Comment étudier une suite (S_n) définie par une somme et calculer sa limite éventuelle**
   a. on calcule la somme en fonction de n puis la limite du résultat
   b. on encadre chaque terme de la somme puis la somme et on utilise le théorème d'encadrement
   c. on minore chaque terme de la somme puis la somme et on montre que le minorant tend vers $+\infty$
   d. on majore chaque terme de la somme puis la somme et on montre que le majorant tend vers $-\infty$
   e. on étudie les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1})

6. **Comment étudier une suite récurrente** $u_{n+1} = f(u_n)$

-on étudie la fonction f (sur le tableau de variations ou la courbe, on conjecture la nature de (u_n))

-on étudie le signe de $g(x) = f(x) - x$

-on précise les valeurs qui annulent g (les points fixes de f sont les limites éventuelles de (u_n)

-on cherche un intervalle I stable par f (tel que $x \in I \Rightarrow x \in f(I)$) et contenant u_0.

a. si f est croissante sur I

-on montre par récurrence que $\forall n,\ u_n \in I$

-à l'aide du signe de $g(x)$, on en déduit que (u_n) est monotone

-si (u_n) est croissante majorée ou décroissante minorée, on conclut par le théorème de convergence monotone

sinon on montre par l'absurde que (u_n) tend vers $\pm\infty$

b. si f est décroissante sur I, on montre par récurrence que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires

puis on utilise le théorème sur les suites extraites

c. si f est contractante sur I ($\left|f'\right|$ est bornée par un réel M tel que $0 < M < 1$)

-on cherche un point fixe $\ell \in I$ de f et on montre que $\forall n,\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant M|u_n - \ell|$ par le TAF

-on montre par récurrence que $\forall n,\ |u_n - \ell| \leqslant M^n|u_0 - \ell|$ (ou $M^{n-1}|u_1 - \ell|\ldots$)

-on conclut, en utilisant $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = 0$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

7. **Comment étudier une suite définie implicitement comme solution d'une équation** (E_n) **qui peut se ramener à une équation de la forme** : $f(x) = g(n)$ (les n peuvent se mettre du même côté du =)

-on étudie f pour montrer que f est bijective de I vers J

-on verifie que, pour tout n, $g(n) \in J$ et on détermine la bijection réciproque f^{-1} de f de J vers I

-on écrit que $\forall n,\ x_n = f^{-1}(g(n))$ et on étudie $f^{-1} \circ g(t)$ (notamment limite quand t tend vers $+\infty$)

8. **Comment étudier une suite définie implicitement comme solution d'une équation** $E_n : f_n(x) = 0$

-on étudie f_n pour montrer que, pour tout n, il existe une unique solution x_n à (E_n)

-on étudie les variations de la suite (x_n) puis on étudie le signe

soit de $f_n(x_{n+1})$ pour placer x_{n+1} et x_n dans le tableau de variations de f_n

soit de $f_{n+1}(x_n)$ pour placer x_{n+1} et x_n dans le tableau de variations de f_{n+1}

-à l'aide du tableau de variations, on montre que (x_n) est croissante majorée ou décroissante minorée

-on détermine la limite éventuelle de (x_n) en passant à la limite dans l'égalité : $\forall n,\ f_n(x_n) = 0$