I Tracés de courbes de fonctions

■ Exercice 1. Tracer les courbes des fonctions suivantes en définissant la liste des abscisses avec `range` et la liste des images par une liste en compréhension.

1. $f(x) = x^2 - x + 1$ sur $[0,1]$ avec 100 points régulièrement espacés.
2. $f(x) = x\cos(2\pi x)$ sur $[-1,1]$ avec 100 points régulièrement espacés.
3. $f(x) = x^2 - 2$ sur $[1,2]$ avec 100 points régulièrement espacés.

■ Exercice 2. Tracer les courbes des fonctions suivantes en définissant la liste des abscisses avec `linspace` et la liste des images en exploitant la vectorisation des fonctions du module `numpy`

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ sur $[0,1]$ avec 100 points régulièrement espacés
2. $f(x) = xe^{-x}$ sur $[-1,1]$ avec 100 points régulièrement espacés
3. $f(x) = \ln(1+x)$ sur $[1,2]$ avec 100 points régulièrement espacés.

II Sommes de Riemann et méthode des rectangles

■ Exercice 3.

1. Programmer une fonction **`Riemann(f,a,b,n)`** prenant en entrée une fonction `f`, deux flottants `a`,`b` tels que $a \leq b$, un entier n et renvoyant en sortie la valeur de la somme de Riemann
$$S_n(f,a,b,n) = \sum_{k=0}^{n-1} hf(a+kh) = \quad \text{où } h = \frac{b-a}{n}.$$
2. Donner une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ où $f(t) = \dfrac{4}{1+t^2}$.
3. Donner la plus petite valeur de n pour laquelle $S_n(f,0,1,n)$ Soit une valeur approchée à 10^{-4} près de I (commencer par rappeler la valeur exacte de I).

■ Exercice 4.

1. Reprendre la dernière question de l'exercice précédent et écrire une fonction **`best_n(p)`** prenant en entrée un entier p et renvoyant en sortie la valeur du plus petit entier n pour laquelle $S_n(f,0,1,n)$ est une valeur approchée à 10^{-p} près de I.
2. Calculer **`best_n(p)`** pour $p = 1,2,3,4,5$.
3. Tracer ensuite la famille de points $(p, n(p))$. Commenter.

■ Exercice 5. Calculer une valeur approchée des intégrales suivantes par une somme de Riemann avec 100 rectangles :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^2 2 - x^2 \mathrm{dx}$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^2 \ln x - 1 \mathrm{dx}$
3. $I_3 = \displaystyle\int_1^6 \sqrt{x} - 2 \mathrm{dx}$
4. $I_3 = \displaystyle\int_0^3 x - 2\sin(2x)\mathrm{dx}$

■ **Exercice 6.** Tracer chacune des fonctions suivantes sur les intervalles donnés :

1. $F_1(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{1+t}\mathrm{d}t$, $I = [1,5]$.
2. $F_2(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x+t)}{x+t}\mathrm{d}t$, $I = [2,4]$.
3. $F_3(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\exp\left(-x\left(1+t^2\right)\right)}{1+t^2}\mathrm{d}t$, $I = [0,1]$.

■ **Exercice 7.** Programmer une fonction `Rectangles(a,b,h,f)` prenant en entrée un flottant a, un entier n, un flottant h et une fonction f et renvoyant en sortie la somme de Riemann sur l'intervalle $[a,b]$ avec des rectangles de largeur h (le réel h s'appele le *pas* de la méthode):

1. En utilisant la fonction `Riemann` précédemment programmée.
2. En reprogrammant le calcul de la somme de Riemann en utilisant la commande `arange` du module `numpy`.

■ **Exercice 8.** On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = \int_0^1 x^2 \sin(nx).$$

1. Écrire une fonction `u(n)` qui prend en entrée un entier n et qui renvoie en sortie une valeur approchée de u_n calculée par la méthode des rectangles avec un pas h fixé à $h = 10^{-2}$.
2. Écrire une fonction `liste(n)` qui prend en entrée un entier n et qui renvoie en sortie la liste des termes $u_0, \ldots, u_n$ calculée précédemment.
3. Conjecturer la nature de la suite (u_n).

III Méthode d'Euler

■ **Exercice 9.**

1. Calculer la solution exacte de l'équation différentielle suivante sur l'intervalle I donné :

$$\begin{cases} y' + y = 0 & \text{sur } I = \mathbf{R}_+ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. Calculer une solution approchée par la méthode d'Euler avec un pas h fixé à $h = 0,2$ sur $[0,1]$. Esssayer enusite avec un pas égal à $h = 10^{-p}$ pour $p \in \{1,2\}$.
3. Tracer sur un même graphique les solutions exacte et approchées.

■ **Exercice 10.**

1. On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' + 2xy = xe^{-x^2} y^3 & \text{sur } I = \mathbf{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Vérifier que $x \mapsto \sqrt{\dfrac{3}{e^{-x^2} + 2e^{2x^2}}}$ est solution.

2. Calculer sur $[0,2]$ une solution approchée avec la méthode d'Euler et un pas égal à $h = 0,02$.
3. Tracer sur un même graphique les solutions exactes et approchées.

TP 2 : Calcul intégral

■ **Exercice 11.**

1. On considère l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2}{x} y = x^2 & \text{sur } I = \mathbf{R}_+^\star \\ y(0) = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Calculer la solution exacte de l'équation.

2. **a)** Calculer une solution approchée par la méthode d'Euler avec un pas h fixé à $h = 0,025$ sur $[0,05;2]$.

b) Tracer sur un même graphique les solutions exacte et approchée.

3. Même question que la question précédente avec un pas égal à $h = 5$ sur l'intervalle $[1,200]$.

■ **Exercice 12.** On considère le système différentiel avec conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} x' = -2x + \dfrac{1}{4} y \\ y' = -3x \\ (x(0), y(0)) = (1, -1) \end{cases}$$

1. Vérifier que le couple de (x, y) de fonctions données par :

$$x : t \mapsto -\frac{3}{4} e^{-t/2} + \frac{7}{4} e^{-3t/2} \qquad y : t \mapsto -\frac{9}{2} e^{-t/2} + \frac{7}{2} e^{-3t/2}$$

est solution.

2. Calculer par la méthode d'Euler la solution approchée sur $[0, 10]$ avec un pas égal à $h = 0, 1$.