TD 1 : INTÉGRATION - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1 Exercices d'application directe du cours

1 Calculer les intégrales sur un segment suivantes (les résultats sont donnés) :

1. $\displaystyle\int_0^1 (x^2-2x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-2}-1}{4}$
2. $\displaystyle\int_0^1 (x-1)\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2 - 1}{2}$
3. $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\ln^3 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(\ln 2)^2} - \frac{1}{2}$
4. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \ln(4/3)$ $(u=\mathrm{e}^{-x})$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{15}{136}$
6. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$ $(t=x+1)$
7. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos x\,\sin^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{160}$
8. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{32} - \frac{1}{4}$
9. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,\mathrm{d}x = \frac{14\sqrt{3}}{5} - \frac{8}{15}$ $(u=\tan x)$

2 Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y'-y=e^x+\cos(x)$.

3 Résoudre sur $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$: $(x+1)\,y'-2\,y=(x+1)^4$. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

4 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$: $x\,y'+2\,y=\cos x$. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

5 Résoudre sur $\mathbb{R}$: $3y''-2y'+y=2x^2+x+1$ $(y_p=ax^2+bx+c)$.

6 Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y''-4\,y'+4y=(x^2+1)\,e^{2x}$ $(y_p=x^2(ax^2+bx+c)\,\mathrm{e}^{2x})$.

7 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$: $x^2\,y''-2x\,y'+(2-x^2)\,y=0$.
On pourra utiliser le changement de fonction inconnue $y=x\,z$.

2 Exercices classiques

8 *Intégrales de Wallis.*
Étant donné un entier naturel n, on note : $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. À partir d'une intégration par parties de I_{n+2}, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}\,I_n$.
2. Déterminer la monotonie de la suite (I_n). Converge-t-elle (ne pas chercher la limite ici) ?
3. À l'aide de ce qui a été démontré précédemment, montrer que I_{n+1} et I_n sont équivalents.
4. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n=(n+1)\,I_n\,I_{n+1}$.
   En remarquant que (u_n) est constante, trouver un équivalent et la limite de I_n.

9 Pour $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue, on considère l'équation (E) : $f(x)+\displaystyle\int_0^x (x-t)\,f(t)\,dt=1$.

1. Soit f une solution de (E).
   (a) Justifier que la fonction $G : x\mapsto \displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^2$.
   (b) Montrer alors que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie : $f''+f=0$.
   (c) En déduire une condition nécessaire pour que f vérifie l'équation (E).
2. Donner toutes les fonctions solutions de (E).

3 Autres exercices

$\boxed{10}$ On considère la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Calculer la dérivée de f et étudier ses variations.
4. Calculer la limite de f en $+\infty$ en utilisant un encadrement.

$\boxed{11}$ On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant $(E_2) : \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : y'' - y' + y = 0$.
2. (a) Soit f une solution de (E_2). Pour tout réel t, on pose : $g(t) = f(e^t)$.
   Montrer que g est solution de (E_1).

   (b) Trouver toutes les fonctions f vérifiant (E_2).

$\boxed{12}$ Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. Justifier que f est définie sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Étudier les variations de f.
3. Utiliser un encadrement pour déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. (a) En utilisant un encadrement, déterminer la limite de f en 0. En déduire que l'on peut prolonger f par continuité en 0.

   (b) Montrer que ce prolongement est dérivable. Préciser la dérivée à droite en 0.
5. On pose $\varphi(t) = \dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{t-1}$.

   (a) En utilisant un développement limité, montrer que φ se prolonge par continuité sur $[0,+\infty[$.
   Cela implique que φ admet des primitives sur $[0,+\infty[$; on peut noter Φ l'une d'elles.

   (b) Déduire de ce qui précède que f admet la limite $\ln 2$ en 1.
6. Tracer le graphe de f.

TD 2 : SUITES RÉELLES

1 Exercices d'application directe du cours

1 Exprimer en fonction de l'entier naturel n le terme général u_n des suites vérifiant les relations suivantes :

1. $u_2 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ u_{n+1} = -3u_n + 2$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = -7$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2\,u_{n+2} + 5\,u_{n+1} - 3\,u_n = 0$.

2 Donner un équivalent simple des suites suivantes :

1. $s_n = \dfrac{2^n - 3^n}{5^n + 2^n}$,
2. $t_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$,
3. $u_n = n^{2n} + n! - e^{n+1}$,
4. $v_n = \ln\left(e^{n-1} + n^5\right)$,
5. $w_n = n^{1/n} - 1$.

3 Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $r_n = \dfrac{\ln(n^3 + 2n - 1)}{\ln 2n}$,
2. $s_n = \left(2 + \dfrac{1}{\ln(n)}\right)^n$,
3. $t_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$,
4. $v_n = \dfrac{n\cos(n^2)}{n^2 - 1}$.

4 Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

2 Exercices classiques

5 Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}.$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.
2. En déduire un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

6 Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 \in \,]0; +\infty[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ln(1 + u_n).$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = f(x) - x$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geqslant 0$ avec égalité pour $x = 0$.
   (b) Conjecturer sur un dessin le comportement de la suite (u_n).
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > 0$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   (c) Étudier la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite éventuelle.

7 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\arctan x - x.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$.
2. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n), \quad \text{où} \quad g(x) = 1 - \frac{1}{2}\arctan x.$$

(a) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\ |u_n - \alpha|$.
On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$.

(d) Conclure quant à la nature de la suite (u_n).

$\boxed{8}$ Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}.$$

1. La suite (u_n) est-elle bien définie ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n > 0$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n :
$$n + 1 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
4. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
5. En admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$, trouver un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.

$\boxed{9}$ Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on considère l'équation

$$(E_n)\ :\ x^n + x^2 + 2x - 1 = 0.$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution x_n sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est majorée par $1/2$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est monotone.
4. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ converge et déterminer sa limite ℓ.

$\boxed{10}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les équations :

$$(E_1) \quad \arctan x + x = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad (E_2) \quad \tan x + x = \frac{1}{n}\ .$$

1. Déterminer le nombre de solutions des équations (E_1) et (E_2).
2. On note a_n la solution de (E_1) et (b_n) la solution dans $]-\pi/2, \pi/2[$ de (E_2).
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

TD 3 : DYNAMIQUE DES POPULATIONS

1 Modèle de Ricker.

L'évolution d'une population de cerfs peut être décrite par la suite $(N_t)_{t\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$N_0 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall\, t \in \mathbb{N}, \quad N_{t+1} = N_t\, \mathrm{e}^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)}.$$

où r et K sont des réels tels que $0 < r < 1$ et $K > 0$.

1. On pose :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x\, \mathrm{e}^{r\left(1-\frac{x}{K}\right)}.$$
   (a) Étudier le signe de $f(x) - x$ suivant les valeurs de x dans $\mathbb{R}_+$.
   En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions notées α et β avec $\alpha < \beta$
   (b) Que dire de $(N_t)_{t\in\mathbb{N}}$ si $N_0 = \alpha$? Si $N_0 = \beta$?
   Que représentent concrètement α et β pour les populations de cerfs ?
   (c) Déterminer le tableau de variations de f.
   (d) Donner l'allure de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$.
2. Dans cette question, on suppose que $N_0 \in]0, K[$.
   (a) Déterminer la monotonie de la suite (N_t).
   (b) Étudier la convergence de la suite (N_t) et déterminer son éventuelle limite.
3. Mêmes questions avec $N_0 \in \left]K, \dfrac{K}{r}\right]$.
4. On suppose maintenant que $N_0 > \dfrac{K}{r}$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $\gamma \in \left]\dfrac{K}{r}, +\infty\right[$ tel que $f(\gamma) = K$.
   (b) En distinguant plusieurs cas selon la valeur de N_0, étudier la convergence de la suite (N_t).
5. Conclure dans le cas général quant au comportement asymptotique de la population de cerfs, selon le modèle présenté.

2 Modèle de Verhulst avec prélèvement constant.

On considère une population qui suit un modèle de croissance logistique. On décide de lui imposer un quota de prélèvement constant p. On s'intéresse alors à l'équation différentielle suivante :

$$(VP) \qquad y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) - p$$

où r, K et p sont des réels strictement positifs.

1. Déterminer une condition sur p telle que l'équation (VP) possède au moins une solution constante.

Dans la suite, on travaille avec $p < p_{max}$ et on note y_1 et y_2 les solutions constantes telles que $y_1 < y_2$.

2. Que dire de la somme de y_1 et y_2 ? de leurs signes ?
3. Dans cette question, on a choisi p de telle sorte que $y_1 = \frac{K}{10}$. Soit y une solution de (VP) définie sur un intervalle I sur lequel elle est strictement comprise entre y_1 et y_2 et telle que $y(0) = y_0$.
   (a) Déterminer une équation différentielle vérifiée par $z = y - y_1$.
   (b) Déterminer z. On pourra poser $u = 1/z$.
   (c) En déduire une expression de y sur l'intervalle I. Représenter y, y_1 et y_2. Interpréter.
   (d) Écrire un programme `Python` permettant de tracer les courbes de y, y_1 et y_2.

$\boxed{3}$ **Modèle de Johnson-Schumacher.**

On considère l'équation différentielle autonome suivante :

$$(JS) \qquad y' = ry\left(\ln\frac{y}{K}\right)^2$$

où r et K sont des réels strictement positifs.

1. Déterminer les solutions constantes de (JS).
2. Soit y une solution de (JS) définie sur un intervalle I sur lequel elle est strictement comprise entre 0 et K et telle que $y(0) = y_0$ ($y_0 > 0$). Déterminer y et I.
3. Représenter graphiquement cette solution pour différentes valeurs de y_0 ainsi que les solutions constantes.
4. Écrire un programme `Python` permettant de tracer différentes solutions, dont les solutions constantes.

Ce modèle est utilisé pour la croissance en hauteur de certaines espèces arborescentes, principalement en peuplement forestier (Schumacher, 1939) comme le Douglas (Thibaut *et al.*, 2002) :

$$y(t) = K\exp\left(\frac{-1}{at+b}\right)$$

où $K = 25.26$, $a = 0.0298$ et $b = 0.1852$.

TD 4 : SÉRIES RÉELLES

1 Exercices d'application directe du cours

$\boxed{1}$ Pour les séries suivantes, établir la convergence de la série (déterminer si besoin les réels x pour lesquels la série converge) et calculer la somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{4}{(2n+1)(2n+3)}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n(1+n+n^2)}{2^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{(n+1)!}3^n$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$\boxed{2}$ Déterminer la **nature** (uniquement) des séries de terme général :

1. $r_n = n\,n!$
2. $s_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$
3. $t_n = 3^{-n}\cos^2(5^n)$
4. $u_n = \dfrac{n-1}{3^n-1}$
5. $v_n = e^{-n^2}$
6. $w_n = \dfrac{e^{-1/n}}{n+1}$.
7. $x_n = \sin\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$
8. $y_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

2 Exercices classiques

$\boxed{3}$ Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{1+n}}$.

1. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que :
$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}.$$
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

$\boxed{4}$ Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$

1. Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$.
Etudier les variations de f.
2. (a) Soit $n \geqslant 2$. Utilisant une méthode des rectangles pour minorer S_n par une intégrale.
(b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln k}$.
3. On définit la suite (x_n) par la donnée de x_0 et de x_1, strictement positifs, et la relation de récurrence :
$$\forall n \geqslant 2, \quad x_n = x_{n-1} + \frac{x_{n-2}}{n\ln n}.$$
(a) Montrer que :
$$\forall\, n \geqslant 3, \quad x_n - x_{n-1} \geqslant \frac{x_1}{n\ln n}.$$
(b) Conclure quant à la convergence de la suite (x_n).

$\boxed{5}$ Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$. On note $(S_n)_{n\geqslant 2}$ la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n.

1. Montrer que les suites extraites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
2. Écrire une fonction Python `serie` de paramètre n qui renvoie la valeur de S_n.
3. Utiliser la fonction précédente pour trouver une valeur approchée de la somme S de la série à $0,01$ près.

3 Autres exercices

$\boxed{6}$ 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{n\,(n+1)}$. Montrer que $\sum v_n$ est convergente et que :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = \frac{1}{n+1}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dfrac{1}{n^2+n+1}$. Etudier la convergence de la série de terme général u_n.

3. On pose $w_n = v_n - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum w_n$ est convergente et que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \leqslant \frac{1}{3\,n^3}.$$

On pourra utiliser les inégalités : $\forall\, k \geqslant 2,\ w_k \leqslant \dfrac{1}{k^4} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^4}$.

$\boxed{7}$ Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}.$$

1. Etudier la convergence de la suite en fonction de u_0 réel donné.
2. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = (u_n)^2$. Etudier la convergence des séries de terme général v_n et w_n.

TD 5 : DÉNOMBREMENT - PROBABILITÉS

1 Exercices d'application directe du cours

$\boxed{1}$ On jette deux dés équilibrés.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6 ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6 sachant que les deux résultats sont différents ?

$\boxed{2}$ On dispose d'un test de sérologie pour identifier une maladie qui atteint 0,5% de la population. Sur 99% des individus malades, le test réagit (c'est à dire 99% des malades sont identifiés par le test) mais sur 2% des individus sains, le test montre une fausse réaction positive.
Le patient Alberto fait un test qui revient positif. Quel est la probabilité qu'il soit malade ?

2 Exercices classiques

$\boxed{3}$

1. Soit n un entier naturel et a, b des réels. Calculer la somme

$$S = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} a^{2k} b^{n-2k}$$

en développant $(a+b)^n$ et $(b-a)^n$.

2. On considère une urne de 101 jetons numérotés de 0 à 100. On effectue 100 tirages d'un jeton avec remise.
Quelle est la probabilité d'avoir un nombre pair de jetons avec un numéro impair ?

$\boxed{4}$ Une puce peut se déplacer sur trois cases A, B, C.

- À l'instant $t = 0$ elle est sur la case A.
- À l'instant n ($n \in \mathbb{N}$) : si la puce est sur A ou B, elle peut passer à l'instant $n+1$, sur les autres cases de manière équiprobable, et si la puce est sur C, elle reste sur C.

Pour tout entier naturel n, on note a_n (*resp.* b_n et c_n) la probabilité que la puce se trouve en A (*resp.* B et C) à l'instant n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver une relation entre c_{n+2}, c_{n+1} et c_n. En déduire c_n en fonction de n.
3. Calculer la probabilité que la puce finisse sur la case C.

$\boxed{5}$ On dispose de $(N+1)$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne k contient k boules blanches et $(N-k)$ boules noires. On tire une urne au hasard, dans laquelle on réalise n tirages avec remise.

1. Si on a tiré n boules blanches pendant les n premiers tirages, quelle est la probabilité que la $(n+1)$-ième boule tirée soit blanche ?
2. Calculer la limite de cette probabilité quand N tend vers l'infini.

$\boxed{6}$ Soit b, n et c des entiers naturels non nuls. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant initialement b boules blanches et n boules noires, et on tire les boules de $\mathcal{U}$ une à une au hasard avec le protocole suivant : à l'issue de chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne accompagnée de c boules de la même couleur.
Pour tout entier naturel i, on note $p_i(b,n)$ la probabilité d'obtenir une boule blanche au i-ème tirage, sachant que l'urne contenait initialement b boules blanches et n boules noires.

1. En considérant le résultat du premier tirage, montrer que :

$$\forall\, i \geqslant 2, \quad p_i(b,n) = \frac{b}{b+n}\, p_{i-1}(b+c,n) + \frac{n}{b+n}\, p_{i-1}(b,n+c).$$

2. Montrer alors que pour tout entier naturel non nul i : $\forall\,(b,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ p_i(b,n) = \dfrac{b}{b+n}$.

$\boxed{7}$ Une urne est composée de b boules blanches et n boules noires où b et n sont des entiers naturels non nuls. Soit N un entier naturel non nul.

1. On effectue N tirages d'une boule avec remise dans l'urne.
   (a) En utilisant la fonction `randint`, écrire une fonction `tirageAR1` de paramètres `b,n,N` renvoyant la liste formée de 1 à chaque fois qu'une boule blanche est tirée, 0 sinon.
   (b) Écrire une fonction `freqBBAR` de paramètres `b,n,N,k,m` permettant de simuler m expériences (avec m grand) telles que celle décrite ci-dessus, et retournant la fréquence d'apparition de k boules blanches, ceci pour un entier k de $[\![0; N]\!]$.
2. On effectue N tirages d'une boule sans remise dans l'urne (ici $N \leqslant n + b$).
   (a) Écrire une fonction `tirageSR` de paramètres `b,n,N` renvoyant la liste formée de 1 à chaque fois qu'une boule blanche est tirée, 0 sinon.
   (b) Écrire une fonction `freqBBSR` de paramètres `b,n,N,k,m` permettant de simuler m expériences (avec m grand) telles que celle décrite ci-dessus, et retournant la fréquence d'apparition de k boules blanches, ceci pour un entier k de $[\![0; n]\!]$.
3. Reprendre la question ($2b$) lorsque l'on effectue un tirage simultané de N boules dans l'urne.

$\boxed{8}$ On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On note A_n l'événement « on obtient au moins une fois PPF avant le lancer n » et B_n l'événement « on obtient pour la première fois PPF au lancer n ».

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $\mathrm{P}(A_{n+1}) = \mathrm{P}(A_n) + \frac{1}{8}\left(1 - \mathrm{P}(A_{n-2})\right)$.
2. Justifier la convergence de la suite $(\mathrm{P}(A_n))$ et déterminer sa limite.
3. Exprimer A_n en fonction des évènements $(B_k)_{k\geqslant 3}$.
   Quelle est la probabilité d'obtenir la séquence PPF au cours de l'expérience ?

3 Autres exercices

$\boxed{9}$ *Tiroir à chaussettes.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Un tiroir contient $2n$ chaussettes (n paires). Georges, qui part en voyage, a décidé d'emmener $2r$ chaussettes ($r \leqslant n$). Au moment de faire sa valise, une panne d'électricité survient. Il prend donc $2r$ chaussettes au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait parmi ces $2r$ chaussettes aucune paire complète ?
2. Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant r$.
   Quelle est la probabilité qu'il y ait parmi ces $2r$ chaussettes exactement k paires complètes ?

$\boxed{10}$ Un mot est constitué de p fois la lettre A et q fois la lettre B.

1. Combien peut-on constituer d'anagrammes de ce mot ?
2. Application 1 : en considérant les symboles « 1 »et « + », combien existe-t-il de suites d'entiers $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ vérifiant $x_1 + \ldots + x_p = n$?
3. Application 2 : soit m et n des entiers naturel non nuls. Combien y a-t-il de façons de placer m boules indiscernables dans n urnes ?