# TD 2 : SUITES RÉELLES

## 1 Exercices d'application directe du cours

**1** Exprimer en fonction de l'entier naturel $n$ le terme général $u_n$ des suites vérifiant les relations suivantes :

1. $u_2 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ u_{n+1} = -3u_n + 2$.
2. $u_0 = 1,\ u_1 = -7$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2\,u_{n+2} + 5\,u_{n+1} - 3\,u_n = 0$.

**2** Donner un équivalent simple des suites suivantes :

1. $s_n = \dfrac{2^n - 3^n}{5^n + 2^n}$,
2. $t_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$,
3. $u_n = n^{2n} + n! - e^{n+1}$,
4. $v_n = \ln\left(e^{n-1} + n^5\right)$,
5. $w_n = n^{1/n} - 1$.

**3** Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $r_n = \dfrac{\ln(n^3 + 2n - 1)}{\ln 2n}$,
2. $s_n = \left(2 + \dfrac{1}{\ln(n)}\right)^n$,
3. $t_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$,
4. $v_n = \dfrac{n\cos(n^2)}{n^2 - 1}$.

**4** Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

## 2 Exercices classiques

**5** Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}.$$

1. Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent.
2. En déduire un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

**6** Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$$u_0 \in \,]0; +\infty[ \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ln(1 + u_n).$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = f(x) - x$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geqslant 0$ avec égalité pour $x = 0$.
   (b) Conjecturer sur un dessin le comportement de la suite $(u_n)$.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n$ existe et $u_n > 0$.
   (b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)$.
   (c) Étudier la convergence de la suite $(u_n)$ et donner sa limite éventuelle.

**7** Soit la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\arctan x - x.$$

1. Donner l'ensemble de définition de $f$. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$.
2. Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n), \qquad \text{où} \qquad g(x) = 1 - \frac{1}{2}\arctan x.$$

(a) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ |g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\ |u_n - \alpha|$.
*On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.*

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$.

(d) Conclure quant à la nature de la suite $(u_n)$.

$\boxed{8}$ Soit $(u_n)$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}.$$

1. La suite $(u_n)$ est-elle bien définie ?
2. Montrer que pour tout entier naturel $n$ : $u_n > 0$.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n$ :
$$n + 1 \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
4. En déduire que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.
5. En admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$, trouver un équivalent de $u_n$ au voisinage de $+\infty$.

$\boxed{9}$ Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on considère l'équation

$$(E_n) \ :\ x^n + x^2 + 2x - 1 = 0.$$

1. Montrer que $(E_n)$ admet une unique solution $x_n$ sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est majorée par $1/2$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est monotone.
4. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ converge et déterminer sa limite $\ell$.

$\boxed{10}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les équations :

$$(E_1) \quad \arctan x + x = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad (E_2) \quad \tan x + x = \frac{1}{n}\ .$$

1. Déterminer le nombre de solutions des équations $(E_1)$ et $(E_2)$.
2. On note $a_n$ la solution de $(E_1)$ et $(b_n)$ la solution dans $] - \pi/2, \pi/2[$ de $(E_2)$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n}$.