TD 3 : DYNAMIQUE DES POPULATIONS

1 Modèle de Ricker.

L'évolution d'une population de cerfs peut être décrite par la suite $(N_t)_{t\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$N_0 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall\, t \in \mathbb{N}, \quad N_{t+1} = N_t\, \mathrm{e}^{r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)}.$$

où r et K sont des réels tels que $0 < r < 1$ et $K > 0$.

1. On pose :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x\, \mathrm{e}^{r\left(1-\frac{x}{K}\right)}.$$
   (a) Étudier le signe de $f(x) - x$ suivant les valeurs de x dans $\mathbb{R}_+$.
   En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions notées α et β avec $\alpha < \beta$
   (b) Que dire de $(N_t)_{t\in\mathbb{N}}$ si $N_0 = \alpha$? Si $N_0 = \beta$?
   Que représentent concrètement α et β pour les populations de cerfs ?
   (c) Déterminer le tableau de variations de f.
   (d) Donner l'allure de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$.
2. Dans cette question, on suppose que $N_0 \in]0, K[$.
   (a) Déterminer la monotonie de la suite (N_t).
   (b) Étudier la convergence de la suite (N_t) et déterminer son éventuelle limite.
3. Mêmes questions avec $N_0 \in \left]K, \dfrac{K}{r}\right]$.
4. On suppose maintenant que $N_0 > \dfrac{K}{r}$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $\gamma \in \left]\dfrac{K}{r}, +\infty\right[$ tel que $f(\gamma) = K$.
   (b) En distinguant plusieurs cas selon la valeur de N_0, étudier la convergence de la suite (N_t).
5. Conclure dans le cas général quant au comportement asymptotique de la population de cerfs, selon le modèle présenté.

2 Modèle de Verhulst avec prélèvement constant.

On considère une population qui suit un modèle de croissance logistique. On décide de lui imposer un quota de prélèvement constant p. On s'intéresse alors à l'équation différentielle suivante :

$$(VP) \qquad y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) - p$$

où r, K et p sont des réels strictement positifs.

1. Déterminer une condition sur p telle que l'équation (VP) possède au moins une solution constante.

Dans la suite, on travaille avec $p < p_{max}$ et on note y_1 et y_2 les solutions constantes telles que $y_1 < y_2$.

2. Que dire de la somme de y_1 et y_2 ? de leurs signes ?
3. Dans cette question, on a choisi p de telle sorte que $y_1 = \frac{K}{10}$. Soit y une solution de (VP) définie sur un intervalle I sur lequel elle est strictement comprise entre y_1 et y_2 et telle que $y(0) = y_0$.
   (a) Déterminer une équation différentielle vérifiée par $z = y - y_1$.
   (b) Déterminer z. On pourra poser $u = 1/z$.
   (c) En déduire une expression de y sur l'intervalle I. Représenter y, y_1 et y_2. Interpréter.
   (d) Écrire un programme `Python` permettant de tracer les courbes de y, y_1 et y_2.

$\boxed{3}$ **Modèle de Johnson-Schumacher.**

On considère l'équation différentielle autonome suivante :

$$(JS) \qquad y' = ry\left(\ln\frac{y}{K}\right)^2$$

où r et K sont des réels strictement positifs.

1. Déterminer les solutions constantes de (JS).
2. Soit y une solution de (JS) définie sur un intervalle I sur lequel elle est strictement comprise entre 0 et K et telle que $y(0) = y_0$ ($y_0 > 0$). Déterminer y et I.
3. Représenter graphiquement cette solution pour différentes valeurs de y_0 ainsi que les solutions constantes.
4. Écrire un programme `Python` permettant de tracer différentes solutions, dont les solutions constantes.

Ce modèle est utilisé pour la croissance en hauteur de certaines espèces arborescentes, principalement en peuplement forestier (Schumacher, 1939) comme le Douglas (Thibaut *et al.*, 2002) :

$$y(t) = K\exp\left(\frac{-1}{at+b}\right)$$

où $K = 25.26$, $a = 0.0298$ et $b = 0.1852$.