TD 4 : SÉRIES RÉELLES

1 Exercices d'application directe du cours

$\boxed{1}$ Pour les séries suivantes, établir la convergence de la série (déterminer si besoin les réels x pour lesquels la série converge) et calculer la somme :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{4}{(2n+1)(2n+3)}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n\,(1+n+n^2)}{2^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{(n+1)!}\,3^n$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$\boxed{2}$ Déterminer la **nature** (uniquement) des séries de terme général :

1. $r_n = n\,n!$
2. $s_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$
3. $t_n = 3^{-n}\cos^2(5^n)$
4. $u_n = \dfrac{n-1}{3^n-1}$
5. $v_n = e^{-n^2}$
6. $w_n = \dfrac{e^{-1/n}}{n+1}$.
7. $x_n = \sin\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$
8. $y_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

2 Exercices classiques

$\boxed{3}$ Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{1+n}}$.

1. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que :
$$\forall\, n \geqslant n_0,\quad u_n \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}.$$
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

$\boxed{4}$ Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$

1. Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$.
Etudier les variations de f.
2. (a) Soit $n \geqslant 2$. Utilisant une méthode des rectangles pour minorer S_n par une intégrale.
   (b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln k}$.
3. On définit la suite (x_n) par la donnée de x_0 et de x_1, strictement positifs, et la relation de récurrence :
$$\forall n \geqslant 2,\quad x_n = x_{n-1} + \frac{x_{n-2}}{n\ln n}.$$
   (a) Montrer que :
$$\forall\, n \geqslant 3,\quad x_n - x_{n-1} \geqslant \frac{x_1}{n\ln n}.$$
   (b) Conclure quant à la convergence de la suite (x_n).

$\boxed{5}$ Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln n}$. On note $(S_n)_{n\geqslant 2}$ la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n.

1. Montrer que les suites extraites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
2. Écrire une fonction Python `serie` de paramètre n qui renvoie la valeur de S_n.
3. Utiliser la fonction précédente pour trouver une valeur approchée de la somme S de la série à $0,01$ près.

3 Autres exercices

$\boxed{6}$ 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \dfrac{1}{n\,(n+1)}$. Montrer que $\sum v_n$ est convergente et que :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = \frac{1}{n+1}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dfrac{1}{n^2+n+1}$. Etudier la convergence de la série de terme général u_n.
3. On pose $w_n = v_n - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum w_n$ est convergente et que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \leqslant \frac{1}{3\,n^3}.$$

On pourra utiliser les inégalités : $\forall\, k \geqslant 2,\ w_k \leqslant \dfrac{1}{k^4} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^4}$.

$\boxed{7}$ Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}.$$

1. Etudier la convergence de la suite en fonction de u_0 réel donné.
2. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = (u_n)^2$. Etudier la convergence des séries de terme général v_n et w_n.