TD 5 : DÉNOMBREMENT - PROBABILITÉS

1 Exercices d'application directe du cours

1 On jette deux dés équilibrés.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6 ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6 sachant que les deux résultats sont différents ?

2 On dispose d'un test de sérologie pour identifier une maladie qui atteint 0,5% de la population. Sur 99% des individus malades, le test réagit (c'est à dire 99% des malades sont identifiés par le test) mais sur 2% des individus sains, le test montre une fausse réaction positive.
Le patient Alberto fait un test qui revient positif. Quel est la probabilité qu'il soit malade ?

2 Exercices classiques

3

1. Soit n un entier naturel et a, b des réels. Calculer la somme
$$S = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} a^{2k} b^{n-2k}$$
en développant $(a+b)^n$ et $(b-a)^n$.
2. On considère une urne de 101 jetons numérotés de 0 à 100. On effectue 100 tirages d'un jeton avec remise.
Quelle est la probabilité d'avoir un nombre pair de jetons avec un numéro impair ?

4 Une puce peut se déplacer sur trois cases A, B, C.

- À l'instant $t = 0$ elle est sur la case A.
- À l'instant n ($n \in \mathbb{N}$) : si la puce est sur A ou B, elle peut passer à l'instant $n+1$, sur les autres cases de manière équiprobable, et si la puce est sur C, elle reste sur C.

Pour tout entier naturel n, on note a_n (*resp.* b_n et c_n) la probabilité que la puce se trouve en A (*resp.* B et C) à l'instant n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver une relation entre c_{n+2}, c_{n+1} et c_n. En déduire c_n en fonction de n.
3. Calculer la probabilité que la puce finisse sur la case C.

5 On dispose de $(N+1)$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne k contient k boules blanches et $(N-k)$ boules noires. On tire une urne au hasard, dans laquelle on réalise n tirages avec remise.

1. Si on a tiré n boules blanches pendant les n premiers tirages, quelle est la probabilité que la $(n+1)$-ième boule tirée soit blanche ?
2. Calculer la limite de cette probabilité quand N tend vers l'infini.

6 Soit b, n et c des entiers naturels non nuls. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant initialement b boules blanches et n boules noires, et on tire les boules de $\mathcal{U}$ une à une au hasard avec le protocole suivant : à l'issue de chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne accompagnée de c boules de la même couleur.
Pour tout entier naturel i, on note $p_i(b, n)$ la probabilité d'obtenir une boule blanche au i-ème tirage, sachant que l'urne contenait initialement b boules blanches et n boules noires.

1. En considérant le résultat du premier tirage, montrer que :
$$\forall\, i \geqslant 2, \quad p_i(b,n) = \frac{b}{b+n}\, p_{i-1}(b+c, n) + \frac{n}{b+n}\, p_{i-1}(b, n+c).$$
2. Montrer alors que pour tout entier naturel non nul i : $\forall\,(b,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ p_i(b,n) = \dfrac{b}{b+n}$.

7 Une urne est composée de b boules blanches et n boules noires où b et n sont des entiers naturels non nuls. Soit N un entier naturel non nul.

1. On effectue N tirages d'une boule avec remise dans l'urne.
   (a) En utilisant la fonction `randint`, écrire une fonction `tirageAR1` de paramètres `b,n,N` renvoyant la liste formée de 1 à chaque fois qu'une boule blanche est tirée, 0 sinon.
   (b) Écrire une fonction `freqBBAR` de paramètres `b,n,N,k,m` permettant de simuler m expériences (avec m grand) telles que celle décrite ci-dessus, et retournant la fréquence d'apparition de k boules blanches, ceci pour un entier k de $[\![0;N]\!]$.
2. On effectue N tirages d'une boule sans remise dans l'urne (ici $N \leqslant n+b$).
   (a) Écrire une fonction `tirageSR` de paramètres `b,n,N` renvoyant la liste formée de 1 à chaque fois qu'une boule blanche est tirée, 0 sinon.
   (b) Écrire une fonction `freqBBSR` de paramètres `b,n,N,k,m` permettant de simuler m expériences (avec m grand) telles que celle décrite ci-dessus, et retournant la fréquence d'apparition de k boules blanches, ceci pour un entier k de $[\![0;n]\!]$.
3. Reprendre la question ($2b$) lorsque l'on effectue un tirage simultané de N boules dans l'urne.

8 On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On note A_n l'événement « on obtient au moins une fois PPF avant le lancer n » et B_n l'événement « on obtient pour la première fois PPF au lancer n ».

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $\mathrm{P}(A_{n+1}) = \mathrm{P}(A_n) + \frac{1}{8}\left(1 - \mathrm{P}(A_{n-2})\right)$.
2. Justifier la convergence de la suite $(\mathrm{P}(A_n))$ et déterminer sa limite.
3. Exprimer A_n en fonction des évènements $(B_k)_{k\geqslant 3}$.
   Quelle est la probabilité d'obtenir la séquence PPF au cours de l'expérience ?

3 Autres exercices

9 *Tiroir à chaussettes.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Un tiroir contient $2n$ chaussettes (n paires). Georges, qui part en voyage, a décidé d'emmener $2r$ chaussettes ($r \leqslant n$). Au moment de faire sa valise, une panne d'électricité survient. Il prend donc $2r$ chaussettes au hasard.

1. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait parmi ces $2r$ chaussettes aucune paire complète ?
2. Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant r$.
   Quelle est la probabilité qu'il y ait parmi ces $2r$ chaussettes exactement k paires complètes ?

10 Un mot est constitué de p fois la lettre A et q fois la lettre B.

1. Combien peut-on constituer d'anagrammes de ce mot ?
2. Application 1 : en considérant les symboles « 1 »et « + », combien existe-t-il de suites d'entiers $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ vérifiant $x_1 + \ldots + x_p = n$?
3. Application 2 : soit m et n des entiers naturel non nuls. Combien y a-t-il de façons de placer m boules indiscernables dans n urnes ?