Séries de nombres réels

I Définitions et propriétés générales

1. Définition d'une série de nombres réels

Définition 1 Soit (u_n) une suite de nombres réels.
On appelle série de terme général u_n la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Remarque • La série de terme général u_n est une nouvelle suite et tout ce qui a été vu sur les suites s'applique à la suite (S_n)
• Si la suite (u_n) n'est définie qu'à partir du rang n_0 alors la série de terme général u_n est la suite définie par : $\forall n \geqslant n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$

Exemple La série de terme général $u_n = n$ est la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Notation La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelée la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$.

2. Nature d'une série

Définition 2 Soit (u_n) une suite de nombres réels.
• On dit que la série $\sum u_n$ est convergente si la suite des sommes partielles (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, est convergente.
• Si la série $\sum u_n$ est convergente alors on appelle somme de la série $\sum u_n$ la limite de la suite (S_n). On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.
• La série $\sum u_n$ est divergente si (S_n) n'admet pas de limite ou si sa limite est infinie.

Définition 3 Étudier la nature d'une série, c'est dire si elle est convergente ou divergente.

Attention il est important de remarquer que la notation $\sum u_n$ désigne une suite (la suite (S_n)) et que la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne une limite, la somme de la série.
Pour utiliser la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ il est impératif d'avoir déjà justifier la convergence de la série.

Exercice 1 Étudier la nature des séries suivantes :
1) $\sum n$
2) $\sum (-1)^n$
3) $\sum a^n$ $\big($série géométrique de raison $a\big)$ en discutant suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$
4) $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$, $n > 0$

Proposition 1 L'ensemble des séries convergentes a une structure d'espace vectoriel.
Autrement dit : pour toutes séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, pour tous scalaires λ et μ, si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est une série convergente.
De plus, si les sommes des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont respectivement égales à U et V alors la somme de la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est égale à $\lambda U + \mu V$.

Preuve évident en considérant que c'est un sous-espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.
C'est un résultat usuel sur les suites.

Attention La notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ne s'utilisant qu'àprès avoir justifier la convergence de la série, on ne peut écrire $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ qu'après avoir justifier la convergence d'au moins deux des trois séries : $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$

Exemple Considérons la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.
Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$ et la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente.
Sa somme est alors égale à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.
Mais l'égalité $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1}$ n'a aucun sens puisque les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{k+1}$ sont divergentes.

Ce serait la même erreur que de penser que $+\infty - \infty = 0$ alors que c'est une forme indéterminée.

3. Premières propriétés

Proposition 2 Soit (u_n) une suite de réels. Si la série $\sum u_n$ est convergente alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Comme $\sum u_n$ est convergente, (S_n) admet une limite finie S.
Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - S_{n-1} = u_n$, par opération sur les limites, (S_n) et (S_{n-1}) convergent ves S donc (u_n) converge vers 0.

Remarque On utilise souvent la contraposée : si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors $\sum u_n$ est divergente.

Exemple Si $|a| \geqslant 1$ alors la série $\sum a^n$ est divergente en effet $\lim_{n\to+\infty} a^n \neq 0$

Remarque La réciproque de cette proposition est fausse :
Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$.
Il est clair que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ montrons que $\sum u_n$ est divergente. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1ère méthode : par l'absurde, supposons que $\sum u_n$ soit convergente de somme S

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

ce qui est contradictoire avec $\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = S - S = 0$.

2e méthode : on peut montrer que $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$

ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(1 + \frac{1}{k}) \leqslant \frac{1}{k}$ et donc $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$.

D'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln k)$ soit, par télescopage, $S_n \geqslant \ln(n+1)$.

Par comparaison des suites, comme $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Proposition 3 On ne change pas la nature (convergence ou divergence) d'une série $\sum u_n$ si on supprime un nombre fini de termes de la suite (u_n).
Autrement dit : Soit une suite (u_n) et $p \in \mathbb{N}$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum_{n\geqslant p} u_n$ sont de même nature.

C'est-à-dire : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n\geqslant p} u_n$ converge (mais les sommes ne sont pas égales)

$\sum u_n$ diverge $\Leftrightarrow \sum_{n\geqslant p} u_n$ diverge

Preuve En exercice en posant $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{p-1} u_k + \sum_{k=p}^{n} u_k = C + \sum_{k=p}^{n} u_k$.

Exemple • La série $\sum \frac{1}{n+p}$ est divergente et tend vers $+\infty$

• Soit $a \in]-1,1[$. la série $\sum_{n\geqslant p} a^n$ est convergente et sa somme est égale à $\sum_{n=p}^{+\infty} a^n = \frac{a^p}{1-a}$.

4. Reste d'une série numérique

Définition 4 Soit (u_n) une suite de nombres réels.
Si la série $\sum u_n$ est convergente alors on appelle reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ le nombre $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Notation Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que la série $\sum u_n$ converge.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ est noté $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
Soit (S_n) la suite des sommes partielles et S la somme de la série $\sum u_n$.
Alors $R_n = S - S_n$.
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Exemples • Soit a tel que $|a| < 1$. Le reste d'ordre n de la série $\sum a^n$ est
$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1}{1-a} - \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{n+1}}{1-a}$ et on a bien $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

• Le reste d'ordre n $(n > 0)$ de la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est
$R_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$ et on a bien $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

II Séries numériques réelles à termes positifs

1. Critère de convergence d'une série à termes positifs

Proposition 4 Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls.
La série $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si, la suite des sommes partielles est majorée.
C'est-à-dire s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant M$.
Sinon, la série $\sum u_n$ tend vers $+\infty$

Preuve La suite (S_n) est croissante $(\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} - S_n = u_n \geqslant 0)$ et majorée donc convergente.

Exercice 2 Étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n^2}$. On pourra utiliser la minoration : $\forall k > 1,\ k^2 \geqslant k(k-1)$

2. Comparaison de deux séries à termes positifs

Proposition 5 Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs ou nuls telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

• Si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge

• Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.

Preuve On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=O}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Comme $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_k \leqslant v_k,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant S_n \leqslant T_n$.

• Si la série $\sum v_n$ converge alors la suite (T_n) est croissante et convergente donc majorée par sa somme $T = \sum_{k=0} v_k$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant S_n \leqslant T$ et que la suite (S_n) est croissante et majorée donc convergente.

• Si la série $\sum u_n$ diverge alors la suite (S_n) est croissante et divergente donc elle tend vers $+\infty$ donc la suite (T_n) tend vers $+\infty$ aussi.

Exercice 3 Considérons la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^P}$.

montrer que si $p \geqslant 2$ alors la série $\sum \dfrac{1}{n^P}$ est convergente

montrer que si $p \leqslant 1$ alors la série $\sum \dfrac{1}{n^P}$ est divergente

Proposition 6 Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs ou nuls telles que $u_n \sim v_n$

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Preuve $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0,\ \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$.

Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{3}{2}$ et donc $\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{2}v_n \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{2}v_n$.

Ainsi, si $\sum u_n$ converge alors $\sum \dfrac{1}{2}v_n$ converge donc $\sum v_n$ aussi

et si $\sum u_n$ diverge alors $\sum \dfrac{3}{2}v_n$ diverge donc $\sum v_n$ aussi.

Exercice 4 Étudier la nature des séries :

1) $\sum \sin \dfrac{1}{2^n}$

2) $\sum \ln(1 + \dfrac{1}{n})$

Proposition 7 Comparaison avec une intégrale.

Soit $a > 0$ et f une fonction définie, continue par morceaux et strictement décroissante sur $[a, +\infty[$.

On considère la série $\sum f(n)$.

Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum f(n)$.

Alors pour tout entier $k > a$, $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$

et donc $\forall (p,n) \in \mathbb{N}^{*2} \mid p \leqslant n,\ \int_p^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=p}^{n} f(k) \leqslant \int_{p-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Preuve Comme f est décroissante sur $[a, +\infty[$,

$k \leqslant t \leqslant k+1 \Rightarrow f(t) \leqslant f(k)$ et donc $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t$ soit $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$

$k-1 \leqslant t \leqslant k \Rightarrow f(k) \leqslant f(t)$ et donc $\int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit $f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$

En sommant, la relation de Chasles donne $\int_p^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=p}^{n} f(k) \leqslant \int_{p-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque • On a un résultat analogue si f est croissante.
• utile quand il est plus facile de calculer l'intégrale que les sommes partielles

Exercice 5 Séries de Riemann (résultat hors programme mais exercice classique)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ selon les valeurs du paramètre α.
On posera $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ et $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

3. Critère de convergence d'une série : la convergence absolue

Définition 5 Soit (u_n) une suite de nombres réels.
La série $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si, la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Remarque L'étude de la convergence absolue d'une série se ramène à l'étude de la convergence d'une série à terme réels positifs.

L'intérêt de la convergence absolue réside dans la proposition suivante :

Proposition 8 Soit (u_n) une suite de nombres réels.
Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.
Dans ce cas, $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$.

Preuve Soit (p_n) et (m_n) les deux suites définies par : $p_n = \begin{cases} u_n \text{ si } u_n \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } u_n < 0 \end{cases}$ et $m_n = \begin{cases} -u_n \text{ si } u_n < 0 \\ 0 \text{ si } u_n \geqslant 0 \end{cases}$.
Les deux suites (p_n) et (m_n) sont des suites réelles à termes positifs et on a :
$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant p_n \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant m_n \leqslant |u_n|$.
Comme la série $\sum |u_n|$ converge, par comparaison, les séries $\sum p_n$ et $\sum m_n$ convergent.
Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = p_n - m_n$, par opération sur les séries, la série $\sum u_n$ est convergente.

Remarque La récirpoque de cette prosition est fausse :
il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

Exercice 6 On considère la série harmonique alternée de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
1) Montrer que cette série n'est pas absolument convergente.
2) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
1ère méthode :
justifier que $\forall t \in [0,1],\ \sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1} = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$.
En intégrant entre 0 et 1, montrer que $S_n = \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\, \mathrm{d}t$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt = 0$.
Conclure

2e méthode :
montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
Conclure.

III Séries de référence

1. Séries télescopiques

Proposition 9 Soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes.
La série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite (u_n) est convergente.

Preuve Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k)$.
Par télescopage, $S_n = u_{n+1} - u_0$.
On en déduit que : $(S_n)_n$ converge $\Leftrightarrow$ $(u_{n+1})_n$ converge.

2. Série harmonique, série harmonique alternée, série de Riemann

Le cas général des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est hors programme

Proposition 10 • la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = +\infty$

• la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente.
• la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente

3. Séries géométriques et séries dérivées des séries géométriques

Proposition 11 Soit $q \in \mathbb{R}$.
La série géométrique $\sum q^n$ est absolument convergente si, et seulement si, $|q| < 1$
Si $|q| < 1$ alors sa somme est égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Preuve On pose $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ définie sur $]-1,1[$.
Comme $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$.

Remarque La fonction f_n est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et on a :
• $\forall x \in]-1,1[$, $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^n}{1-x}$
• $\forall x \in]-1,1[$, $f_n''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2(1-x^{n+1})}{(1-x)^3} - \frac{2(n+1)x^n}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)nx^{n-1}}{1-x}$

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 12 Soit $q \in \mathbb{R}$.
Les séries géométriques dérivées première $\sum nq^{n-1}$ et seconde $\sum n(n-1)q^{n-2}$ sont absolument convergentes si, et seulement si, $|q| < 1$.
Si $|q| < 1$ alors les sommes de ces séries sont égales à $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ et
$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Exercice 7 Étudier la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

1) $\sum 2^{n-3} \times 3^{-n+1}$

2) $\sum \frac{n}{2^{n+2}}$

3) $\sum n^2 \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}$

4. Série exponentielle

Proposition 13 $\forall x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Exercice 8 Pour tout réel x, étudier la convergence et calculer la somme des séries $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Indication : considérer $e^x + e^{-x}$ et $e^x - e^{-x}$