

Semaine 5  
du lundi 14 au vendredi 18 octobre 2024

## Suites réelles

Somme, produit, quotient de suites réelles

Suites arithmétiques, suites géométriques

Suites arithmético-géométriques

Suites vérifiant une relation du type  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Suites majorées, minorées, bornées, suites monotones

Convergence, divergence, limite infinie

Comparaison de la convergence et de la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec celles des deux suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$

Opérations sur les limites

Résultats fondamentaux sur les limites et inégalités :

- Signe d'une suite de limite non nulle
- Passage à la limite dans une inégalité large
- Théorème des gendarmes
- Cas des limites infinies dans une inégalité

Théorème de la limite monotone

Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes

Exemples d'étude de suites du type  $u_{n+1} = f(u_n)$

Croissances comparées entre les suites factorielle, puissance ( $n^\alpha$  avec  $\alpha > 0$ ), géométriques ( $a^n$  avec  $a > 1$ )

Suites équivalentes, notation  $u_n \sim v_n$

L'équivalence est compatible avec la multiplication, la division et l'élevation à une puissance constante

Utilisation des équivalents pour la recherche de limites

## Exemples de modèles dynamiques de populations

modèles discrets (suites récurrentes)

modèles continus (équations différentielles autonomes)

## Séries de nombres réels

Notation  $\sum_{n \geq n_0} u_n$  ou  $\sum u_n$ , sommes partielles  $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$

Convergence d'une série, somme d'une série convergente  $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$

Combinaison linéaire de séries convergentes

Théorème de convergence par comparaison pour deux séries à termes positifs

Si les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont équivalentes alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature

Convergence absolue (condition suffisante de convergence)

Si une série est absolument convergente alors elle est convergente

Convergence et somme de la série géométrique  $\sum_{n \geq 0} q^n$  (pour  $|q| < 1$ )

Convergence et somme de la série géométrique dérivée première  $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$

Convergence et somme de la série géométrique dérivée seconde  $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$

Convergence et somme de la série exponentielle  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$

Convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  et divergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$

Questions de cours

Énoncer la définition d'une suite arithmétique, terme général, somme des termes consécutifs

Énoncer la définition d'une suite géométrique, terme général, somme des termes consécutifs

Terme général d'une suite vérifiant une relation du type  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  dans le cas  $a^2 + 4b > 0$

Terme général d'une suite vérifiant une relation du type  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  dans le cas  $a^2 + 4b = 0$

Terme général d'une suite vérifiant une relation du type  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  dans le cas  $a^2 + 4b < 0$

Énoncer la définition d'une suite majorée, minorée, bornée

Énoncer la définition et le théorème des suites adjacentes

Énoncer la définition de suites équivalentes

Suites équivalentes usuelles

Croissances comparées entre les suites puissance  $n^\alpha$  (avec  $\alpha > 0$ ), géométrique  $a^n$  (avec  $a > 1$ ) et factorielle  $n!$

Théorème des gendarmes (ou d'encadrement) et cas de limites infinies dans une inégalité

Théorème sur les suites extraites des termes de rangs pairs et impairs

Convergence et somme d'une série

Condition nécessaire de convergence de la série  $\sum u_n$

Critère de convergence par comparaison d'une série à termes positifs

définition de la convergence absolue, critère de convergence et inégalité sur les sommes

définition et convergence d'une série télescopique

définition et convergence de la série harmonique

définition et convergence d'une série exponentielle

Condition de convergence et somme des séries suivantes :  $\sum q^n$ ,  $\sum nq^{n-1}$  et  $\sum n(n-1)q^{n-2}$