Chapitre 10 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1 - L'ensemble $\mathbb{R}^n$

- L'ensemble $\mathbb{R}^n$. Notation des vecteurs en ligne ou en colonne.
- Opérations : somme, multiplication par un scalaire.
- Notion de combinaison linéaire, notation Vect.
- Définition d'un sev de $\mathbb{R}^n$. Tout Vect est un sev.
- Tout ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k = 0\}$ est un sev.
- Intersection de deux sous-espaces vectoriels.
- Les solutions d'un système linéaire homogène forment un sev.

2 - Sous-espaces vectoriels : bases et dimensions.

- Famille génératrice d'un sev. Propriétés.
- Familles libres / liées de vecteurs. Propriétés.
- Bases d'un espace vectoriel, dimension.
- Théorème de la base incomplète.
- Dimension d'un sous-espace vectoriel.
- Si $Card(\mathcal{F}) = \dim(E)$, alors $\mathcal{F}$ libre $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ génératrice.

3 - Sommes de sev, sommes directes

- Somme de deux sous-espaces vectoriels. Propriétés.
- Formule de Grassmann : dimension d'une somme.
- Sommes directes : définition et caractérisation.
- Sous-espaces supplémentaires.

Conformément au programme, on se focalisera en particulier sur des exemples dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$.

Démonstrations exigibles :

- Supposons $F = Vect(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k)$ et $u_k \in Vect(u_1, \ldots, u_{k-1})$. Alors $F = Vect(u_1, \ldots, u_{k-1})$.
- Supposons $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ libre, alors :
$$\text{si } x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^{k} \beta_j u_j, \quad \text{alors } \forall j \in [\![1, n]\!],\ \lambda_j = \beta_j$$
- Supposons $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ libre dans $\mathbb{R}^n$, et $x \in \mathbb{R}^n$, alors :
$$(u_1, u_2, \ldots, u_k, x) \text{ liée } \Longleftrightarrow x \in Vect(u_1, u_2, \ldots, u_k)$$
- Si F et G sont deux sev de $\mathbb{R}^n$, sont équivalents :
  (i) la somme $F + G$ est directe
  (ii) si $x + y = 0$ avec $x \in F$ et $y \in G$, alors $x = y = 0$
  (iii) $F \cap G = \{0\}$.

Savoirs faire exigibles :

— Résoudre un système linéaire simple.
— Traduire qu'un vecteur est combinaison linéaire d'autres.
— Comprendre et utiliser la notation Vect.
— Mettre les solutions d'un syst.homogène en notation Vect.
— Vérifier si un ensemble quelconque est un sev de $\mathbb{R}^n$.
— Vérifier si une famille de vecteurs est libre/liée.
— Vérifier si une famille de vecteurs est génératrice d'un sev.
— Vérifier si une famille de vecteurs est une base d'un sev.
— Déterminer une base et la dimension d'un espace vectoriel.
— Écrire un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ sous équation cartésienne.
— Montrer que deux sev sont égaux.
— Déterminer l'intersection de deux sous-espaces vectoriels.
— Déterminer la somme de deux sous-espaces vectoriels.
— Connaître et utiliser la formule de Grassmann.
— Traduire que deux sev sont en somme directe/supplémentaires.
— Décomposer un vecteur dans une somme directe.