

Chapitre 8 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ *Reprise du programme pr c dent***Chapitre 9 - Applications linéaires****1 - Définitions**

- Définition d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$.
- Vocabulaire : endomorphismes, isomorphismes, automorphismes.
- Si f est linéaire, alors $f(0) = 0$.
- L'image directe d'un sev par une appl.linéaire est un sev.
- L'image réciproque d'un sev par une appl.linéaire est un sev.

2 - Image, noyau, rang.

- Noyau de f . C'est un sous-espace vectoriel de l'ev de départ.
- Caractérisation : f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0\}$.
- Image de f . C'est un sous-espace vectoriel de l'ev d'arrivée.
- Caractérisation : f est surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$.
- Rang de f .

3 - Image des familles de vecteurs

- Si $f(\mathcal{B})$ est une famille libre, alors $\mathcal{B}$ est libre.
- Si $\mathcal{B}$ est libre et f injective, alors $f(\mathcal{B})$ est libre.
- f isomorphisme ssi f envoie une base de E vers une base de F .
- Conséquence : si f est bijective, on a $\dim(E) = \dim(F)$.
- Théorème du rang. Application : si $\dim(E) = \dim(F)$, f injective ssi f surjective

4 - Opérations sur les applications linéaires

- $\mathcal{L}(E, F)$ est stable par C.L. Applications nulle, identité.
- Une composée d'ap.linéaires est encore linéaire. Réciproque d'un isomorphisme.
- Puissances d'un endomorphisme, formule du binôme.

Pas encore de projecteurs / symétries. On fera plus tard dans l'année, ou l'année prochaine.

Démonstrations exigibles :

- Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.
Alors f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E .
Alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$.
- Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire et injective.
Soit $(u_1, \dots, u_k)$ une famille libre de E .
Alors $(f(u_1), \dots, f(u_k))$ est une famille libre de F .
- Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ linéaires.
Alors la composée $g \circ f$ est linéaire, et on a toujours

$$\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f) \quad \text{et} \quad \text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$$

Savoirs faire exigibles :

- Traduire qu'une application est linéaire.
- Déterminer le noyau d'une application linéaire explicite.
- Déterminer l'image d'une application linéaire explicite.
- Déterminer le rang d'une application linéaire explicite.
- Connaître et utiliser le théorème du rang.
- Traduire injectivité/surjectivité sur image/noyau/rang.
- Savoir comment montrer une équivalence
- Savoir comment montrer une implication
- Savoir comment montrer une égalité d'ensembles
- Savoir comment montrer une inclusion d'ensembles
- Savoir comment montrer que deux applications sont égales
- Savoir montrer une suppl mentarit  par analyse-synthèse.