

TRAVAIL D'ÉTÉ - RENTRÉE 913



Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que $((1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 2, 3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2y - 3x, 4y - 6x).$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f^2 = f$. Déterminer $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$, $\text{Ker } f - \text{Id}_{\mathbb{E}}$, $\text{rg } f$ dans l'ordre de votre choix.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ par

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, u(e_i) = e_{i+1} \text{ et } u(e_n) = e_1.$$

- a) Déterminer la matrice de u dans la base canonique. On la note M .
 - b) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, déterminer $u^n(e_i)$.
 - c) En déduire M^n .
 - d) Justifier que M est inversible et donner son inverse en fonction de M .
4. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 1$ fixé).
 - a) Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$.
 - b) Montrer que $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.
 - c) En utilisant les dimensions, montrer que

$$\text{Im } f^2 = \text{Im } f \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2.$$

- d) On suppose

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

Montrer que $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$.

- e) On suppose $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$. Montrer que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. En déduire que

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

Exercice 2

1. Soit $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ s \longmapsto \frac{1}{(1-s)^2}$$

- Dresser, avec justifications, le tableau de variations de f .
 - Calculer l'équation de la droite Δ , tangente à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f en $s = 1/2$.
 - Représenter sur une même figure Δ et $\mathcal{C}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a

$$(1-s)^2 \left(\sum_{i=1}^n i s^{i-1} \right) = 1 - s^n (1 + n - sn).$$

- Montrer que si $|s| \geq 1$, alors la série $\sum_{i=1}^{\infty} i s^{i-1}$ diverge.
 - Montrer que si $|s| < 1$, alors la série $\sum_{i=1}^{\infty} i s^{i-1}$ converge et $\sum_{i=1}^{\infty} i s^{i-1} = \frac{1}{(1-s)^2}$.
- Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}$ pour tout entier $n \geq 1$.
 - Montrer que $e^{-\lambda X}$ admet une espérance et la calculer.
 - Montrer que $X e^{-\lambda X}$ admet une espérance et la calculer.
- Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ une fonction dérivable.
 - Montrer que la fonction h définie par $h(s) = \frac{1}{1-g(s)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a

$$h'(s) = \sum_{i=1}^{\infty} i g'(s) g(s)^{i-1}$$

- Soit $0 < x < 2$. Montrer que la série $\sum_{i=1}^{\infty} i(1-x)^{2i}$ converge.
 - Pour $0 < x < 2$, on pose

$$t(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-x)^{2i}$$

Trouver la limite de $x^2 t(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.

Exercice 3 Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$$

1. a) Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$.
b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue x , possède une seule solution, notée u_n , élément de $[0, 1]$.
c) Donner la valeur de u_1 .
2. a) Pour tout réel x de $[0, 1]$, exprimer $f_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.
b) En déduire que $f_{n+1}(u_n) \geq 1$.
c) Utiliser les variations de f_{n+1} pour conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
d) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
3. a) Pour tout réel $x \neq 1$, rappeler la formule donnant $\sum_{k=0}^n x^k$ en fonction de x et n .
b) En déduire que, pour tout réel x différent de 1, on a l'égalité :

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

- c) Donner alors une expression sans symbole Σ de $f_n(x)$ pour $x \in [0, 1[$.
4. a) Déterminer u_2 puis en déduire que, si n est supérieur ou égal à 2, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.
b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n^n$.
c) En revenant à la définition de u_n , montrer, pour $n \geq 2$, l'égalité :

$$u_n^2 - 3u_n + 1 = nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1}$$

- d) Donner finalement la valeur de ℓ .

Exercice 4

On cherche à trouver des individus au sein d'une population possédant une propriété détectable par une analyse de sang (par exemple, "être malade" ou "être donneur compatible"). On fixe $q \in]0, 1[$ et l'on suppose que les individus ont, indépendamment les uns des autres, une probabilité q de **ne pas** posséder la propriété recherchée. Le résultat d'une analyse est dit **positif** si la propriété est présente, **négatif** si elle ne l'est pas. On va étudier divers protocoles de test.

Partie 1. Recherche de toutes les personnes possédant la propriété.

On veut trouver **toutes** les personnes qui ont la propriété dans un ensemble de n personnes, où n est un entier tel que $n \geq 2$.

Protocole A

On mélange le sang des n personnes et l'on fait une analyse de ce mélange. Si le résultat est négatif, on s'arrête. S'il est positif, on analyse individuellement le sang de chacune des n personnes.

On note A_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole **A** pour n personnes.

1.
 - a) Pourquoi s'arrête-t-on si le premier résultat est négatif?
 - b) Quelles valeurs peut prendre A_n ?
 - c) Déterminer la loi de A_n .
 - d) Montrer que l'espérance de A_n est $E[A_n] = n + 1 - nq^n$.
2. On considère un entier k tel que $1 \leq k < n$. Calculer la probabilité conditionnelle que les k premières personnes testées soient toutes négatives, sachant que le résultat de l'analyse du mélange est positif.

Protocole B

On fait un test pour chacune des n personnes.

3.
 - a) À quelle condition sur q fait-on, en moyenne, moins de tests avec le protocole **A** qu'avec le protocole **B**? On exprimera le résultat en fonction de n .
 - b) Calculer la limite à droite, en 0, de $x \mapsto x^x$.
 - c) Justifier que, pour n assez grand, le protocole **B** est préférable au protocole **A**.

Partie 2. Recherche d'une personne possédant la propriété.

On veut dorénavant trouver **une** personne possédant la propriété recherchée, au sein d'une population que l'on suppose infinie.

Protocole C

On teste toutes les personnes une par une, jusqu'à en trouver une qui possède la propriété.

On note C la variable aléatoire qui indique le rang de la première personne possédant la propriété, c'est-à-dire que $C = j$ si la j -ème personne est la première à posséder la propriété. Ainsi, C compte le nombre d'analyses effectuées en appliquant ce protocole **C**. On rappelle que q est la probabilité de ne pas posséder la propriété recherchée et on note $p = 1 - q$ la probabilité de la posséder.

4. a) Donner la loi de C .
b) Donner, sans justification, l'espérance de C .

On va maintenant procéder par regroupement. On fixe un entier $n \geq 2$, qui désignera la taille des groupes. Ainsi, le premier groupe contiendra les n premières personnes, le second groupe contiendra les n suivantes, et ainsi de suite.

Protocole D

On mélange le sang des n personnes du premier groupe et on le teste. Si le résultat est négatif, on procède de façon similaire avec le groupe suivant, et ainsi de suite jusqu'à obtenir un test positif. On teste ensuite une par une les personnes du groupe dont le test est positif, jusqu'à trouver la première personne possédant la propriété.

On note G la variable aléatoire représentant le numéro du premier groupe positif. Ainsi, $G = 1$ si c'est le premier groupe qui a donné un test positif, $G = 2$ si c'est le second, etc.

5. Soit k un entier strictement positif.
 - a) Exprimer l'évènement $\{G > k\}$ en fonction de la variable aléatoire C .
 - b) Calculer la probabilité $P(G > k)$.
 - c) Reconnaître la loi de G .

On note X la variable aléatoire représentant le numéro de la première personne à avoir un test positif au sein de son groupe. Par exemple, si c'est la cinquième personne du second groupe qui donne le premier test positif, cela signifie que $G = 2$ et $X = 5$.

6.
 - a) Quelles valeurs peut prendre X ?
 - b) Pour $k \geq 1$ et $i \in \{1, \dots, n\}$, calculer la probabilité conditionnelle $P(X = i | G = k)$.
 - c) Calculer la limite de cette quantité lorsque $q \rightarrow 1$.
 - d) Montrer que X est indépendante de G .
 - e) Montrer que $E[X] = \frac{1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}}{(1-q)(1-q^n)}$.
7. On note D le nombre de tests effectués avec le protocole **D**.

- a) Exprimer, en fonction des valeurs prises par G et par X , l'évènement $\{D = 3\}$.
 - b) Trouver une relation entre D , G et X .
 - c) Soit un entier $j \geq 1$. Montrer que $P(D = j) = \sum_{k=1}^{j-1} P(C = (k-1)n + j - k)$.
8. a) Calculer $E[D]$.
- b) À n fixé, calculer la limite du quotient $\frac{E[D]}{E[C]}$ lorsque $q \rightarrow 1$. Interpréter ce résultat.