

CHAPITRE 2

Supplémentaires, projections, symétries

Dans tout ce chapitre, E est un espace vectoriel.

1. SOMMES, INTERSECTIONS, SUPPLÉMENTAIRES

1.1. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 1 | Intersection de deux espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E , l'ensemble $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque 1.1 — On a la généralisation suivante : si $F_1, \dots, F_k$ sont des sous-espaces vectoriels, alors $\bigcap_{i=1}^k F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque 1.2 — $F \cap G$ est le plus grand sous-espace vectoriel de E qui est à la fois inclus dans F et dans G .

Remarque 1.3 — $F \cap G$ est toujours non vide, car l'intersection contient toujours 0_E . Si $F \cap G = \{0_E\}$, on dit que l'intersection est nulle ou réduite à zéro.

Exemple 1 — Déterminer dans $\mathbb{R}^3$ l'intersection de $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $F = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$.

Définition 1 | Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . La somme de F et G est le sous-espace vectoriel

$$F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}.$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui s'écrivent comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Proposition 2

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E . C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G .

Exemple 2 — Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer la somme $F + G$ où

1. $F = \text{Vect}((1, 0))$ et $G = \text{Vect}((1, 1))$.
2. $F = \text{Vect}((1, 0))$ et $G = \text{Vect}((-1, 0))$.

Exemple 3 — Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . Déterminer :

1. $F + \{0_E\}$,
2. $F + E$,
3. $F + F$.

Définition 2 | Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que la somme $F + G$ est directe si $F \cap G = \{0_E\}$. Dans ce cas, on note la somme des deux espaces $F \oplus G$.

Proposition 3

La somme $F + G$ est directe si et seulement si tout vecteur de $F + G$ s'écrit **de façon unique** comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Exemple 4 — Exemples de sommes directes :

1. Dans $\mathbb{R}^2$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$.
3. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Définition 3 | Espaces vectoriels supplémentaires

Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si E est la somme directe de F et de G :

$$E = F \oplus G.$$

Exemple 5 — Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((1, -1, 0))$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 6 — Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit F l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et G l'ensemble des matrices triangulaires inférieures. Montrer que $F + G = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais que la somme n'est pas directe. Trouver un supplémentaire de F .

Exemple 7 — Soit $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$) l'ensemble des matrices carrées symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a la somme directe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n$.

1.2. Cas de la dimension finie

Théorème 1 | Existence d'un supplémentaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . Alors F admet un supplémentaire dans E .

Attention

Le supplémentaire d'un espace vectoriel (de dimension strictement supérieure à 1) n'est **jamais unique**. On le voit dès la dimension 2 dans $\mathbb{R}^2$: $\text{Vect}((1, 0))$ admet comme supplémentaire n'importe quel espace de la forme

$$\text{Vect}((\alpha, 1)) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4 | Dimension de la somme de sous-espaces vectoriels (formule de Grassmann)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E , alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

En particulier, si la somme est directe :

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

Corollaire 1 | Dimension d'un supplémentaire

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si F et G sont supplémentaires dans E , alors

$$\dim E = \dim F + \dim G.$$

Remarque 1.4 — On peut donc facilement déterminer la dimension d'un supplémentaire G de F :

$$\dim G = \dim E - \dim F.$$

Théorème 2 | Caractérisation des supplémentaires

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Si deux des assertions suivantes sont vérifiées :

1. $F \cap G = \{0_E\}$ (l'intersection des sous-espaces est triviale),
2. $\dim F + \dim G = \dim E$,
3. $E = F + G$ (tout vecteur de E se décompose comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G),

alors

$$E = F \oplus G.$$

Remarque 1.5 — Dans ce cas, la troisième assertion est automatiquement vérifiée.

Remarque 1.6 — On essaiera de se ramener le plus possible à l'utilisation des deux premières propriétés, qui sont souvent les plus faciles à démontrer.

Méthode (*Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires*)



1. Première question à se poser : connaît-on les dimensions des espaces en question, ou peut-on les déterminer ?
2. Si c'est le cas, on montre une des deux autres propriétés du théorème précédent. Selon la situation, l'une d'elles sera plus facile à démontrer (souvent la propriété de l'intersection).
3. On peut aussi raisonner par analyse-synthèse : pour tout $x \in E$, déterminer des uniques $y \in F, z \in G$ tels que $x = y + z$.

Théorème 3

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . Soient $(f_1, \dots, f_m)$ et $(g_1, \dots, g_n)$ des bases respectives de F et G . Si la concaténation des bases $(f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n)$ est une famille libre, alors c'est une base de $F + G$.
2. Si de plus E est de dimension finie et si la concaténation des bases $(f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n)$ est une base de E , alors F et G sont supplémentaires dans E .

Définition 4

Si $E = F \oplus G$, la concaténation d'une base de F et d'une base de G donne une base de E , appelée **base adaptée à la somme directe**.

Théorème 4 | Théorème de la base adaptée

Si E est un espace vectoriel de dimension finie qui s'écrit comme la somme directe de deux sous-espaces vectoriels $E = F \oplus G$, alors il existe une base de E adaptée à cette somme directe.

Exemple 8 — Après avoir démontré que les espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$, donner une base adaptée à la somme directe :

$$\mathbb{R}^4 = \text{Vect}((1, 1, 1, 1)) \oplus \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}.$$

1.3. Somme de n sous-espaces vectoriels**Définition 5 | Somme de n sous-espaces vectoriels**

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . Leur somme est

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_1 + \dots + F_n = \left\{ \sum_{k=1}^n v_k \mid (v_1, \dots, v_n) \in F_1 \times \dots \times F_n \right\}.$$

C'est l'ensemble des vecteurs qu'on peut écrire comme une somme d'éléments de chacun des espaces.

Définition 6 | Somme directe de n sous-espaces vectoriels

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . Ils sont en somme directe si, pour tout élément de leur somme, la décomposition est unique. On note alors la somme :

$$\bigoplus_{k=1}^n F_k.$$

Théorème 5 | Caractérisation des sommes directes

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $F_1, F_2, \dots, F_n$ sont en somme directe.
- (2) Pour tout $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$, on a l'implication :

$$\sum_{i=1}^n u_i = 0_E \implies \forall i \in \{1, \dots, n\}, u_i = 0_E.$$

- (3) $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ sont en somme directe et $\sum_{i=1}^{n-1} F_i$ est en somme directe avec F_n .

Remarque 1.7 — On utilisera souvent la caractérisation (2) pour prouver qu'une somme est directe.



Attention

Pour $n \geq 3$, la condition $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n = \{0_E\}$ (ou même $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ pour tout $i \neq j$) **ne suffit pas** pour que la somme soit directe. La caractérisation (2) ou l'indépendance globale donnée en (3) est absolument nécessaire.

Proposition 5 | Dimension d'une somme directe

Si $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe, alors

$$\dim \bigoplus_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n \dim F_i.$$

Réciproquement, si la dimension de $F_1 + \dots + F_n$ est égale à $\sum_{i=1}^n \dim F_i$, alors la somme est directe.

Remarque 1.8 — On a toujours :

$$\dim \sum_{i=1}^n F_i \leq \sum_{i=1}^n \dim F_i.$$

On s'intéressera beaucoup à la méthode suivante :



Méthode (Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$)

On a deux méthodes principales :

1. Montrer que

$$\forall v \in E, \exists!(v_1, \dots, v_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, \quad v = \sum_{i=1}^n v_i.$$

2. Montrer que la somme est directe (souvent avec la caractérisation (2) du théorème) et que

$$\sum_{i=1}^n \dim F_i = \dim E.$$

2. PROJECTEURS ET SYMÉTRIES

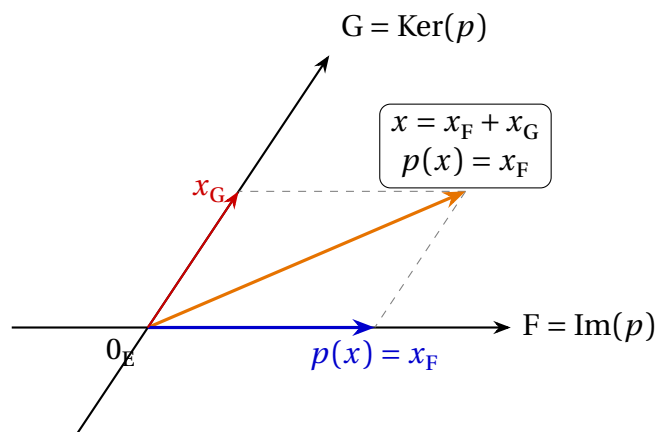
Dans cette sous-partie, on étudie deux familles particulières d'endomorphismes : les projecteurs et les symétries. Ce sont les endomorphismes qui admettent respectivement le polynôme $X^2 - X$ et le polynôme $X^2 - 1$ comme polynôme annulateur. On en verra plusieurs caractérisations.

Définition 7 | Projecteur associé à une somme directe

Si E se décompose comme la somme directe $E = F \oplus G$, alors le projecteur sur le sous-espace vectoriel F parallèlement à G est l'application linéaire p définie par

$$\forall x \in E, \quad p(x) = x_F,$$

où la décomposition unique de x s'écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.



Exemple 9 — Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$u(x, y) = (y, y).$$

Montrer que c'est le projecteur sur $\text{Vect}((1, 1))$ parallèlement à $\text{Vect}((1, 0))$.

1. **Somme directe** : Les sous-espaces F et G sont engendrés respectivement par les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, 0)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. De plus, comme $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = 1$, on a bien :

$$\mathbb{R}^2 = F \oplus G.$$

2. **Décomposition d'un vecteur quelconque :** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrivons ce vecteur comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G :

$$(x, y) = (y, y) + (x - y, 0).$$

On remarque que :

- $(y, y) = y(1, 1) \in F$;
- $(x - y, 0) = (x - y)(1, 0) \in G$.

3. **Conclusion :** Par définition de l'application u , on a $u(x, y) = (y, y)$, ce qui correspond exactement à la composante sur F dans la décomposition précédente. Ainsi, u est bien le projecteur sur $F = \text{vect}((1, 1))$ parallèlement à $G = \text{vect}((1, 0))$.

Exemple 10 — Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$u(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0).$$

Montrer que c'est un projecteur et déterminer les sous-espaces vectoriels auxquels il est associé.

Proposition 6

Soit p le projecteur sur F parallèlement à G , alors $\text{Ker}(p) = G$ et $\text{Im}(p) = F$.

Remarque 2.1 — Si p est le projecteur sur F parallèlement à G , alors l'application $q = \text{Id}_E - p$ est aussi un projecteur : c'est le projecteur sur G parallèlement à F . On l'appelle parfois projecteur complémentaire de p .

Théorème 6 | Caractérisation des projecteurs

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$, alors p est le projecteur associé à une somme directe si et seulement si $p^2 = p$.

Proposition 7

Soit p un projecteur, alors $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$.

Remarque 2.2 — Après avoir prouvé qu'un endomorphisme est un projecteur, on cherchera souvent la somme directe à laquelle il est associé en déterminant son noyau et son image.

Exemple 11 — Montrer que la matrice suivante représente un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera les espaces caractéristiques.

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 12 — Déterminer la matrice, dans la base canonique, du projecteur sur $\text{Vect}((1, 1, 0))$ parallèlement à $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$. On déterminera d'abord une base dans laquelle la matrice est facile à construire.

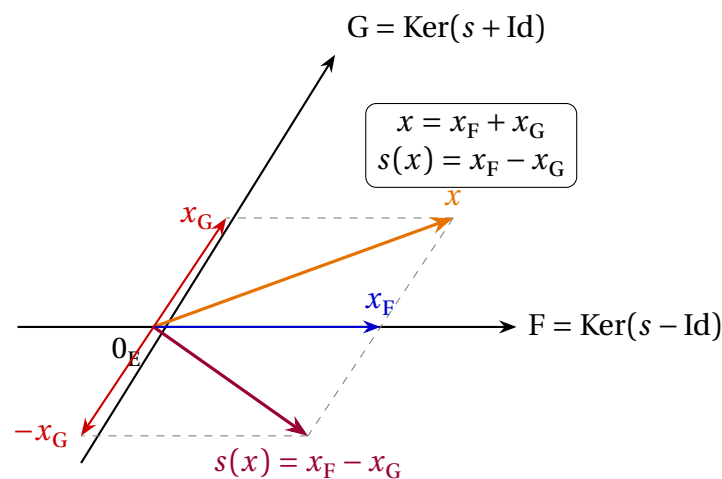
Exemple 13 — Soit $u : M \in M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M^T$. Montrer que u est une symétrie.

Définition 8 | Symétrie associée à une somme directe

Si E se décompose comme la somme directe $E = F \oplus G$, alors la symétrie par rapport à F le long de G est l'application linéaire s définie par

$$\forall x \in E, \quad s(x) = x_F - x_G,$$

où la décomposition unique de x s'écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.



Remarque 2.3 — Si p est le projecteur sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F le long de G , alors ces deux applications sont reliées par les relations :

$$s = 2p - \text{Id}_E \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{s + \text{Id}_E}{2}.$$

Exemple 14 — Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$u(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n).$$

Montrer que c'est une symétrie et déterminer les sous-espaces vectoriels auxquels elle est associée.

Proposition 8

Soit s la symétrie par rapport à F le long de G , alors $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

Théorème 7 | Caractérisation des symétries

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$, alors s est la symétrie associée à une somme directe si et seulement si $s^2 = \text{Id}_E$.

Remarque 2.4 — Une symétrie est un automorphisme et elle est son propre inverse ($s^{-1} = s$). On parle parfois d'involution.

Remarque 2.5 — L'identité est à la fois un projecteur et une symétrie.

Exemple 15 — Soit $u : M \in M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M^T$. Montrer que u est une symétrie.

Remarque 2.6 — Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est un projecteur,
2. $u^2 = u$,
3. il existe une base de E dans laquelle la matrice M représentant u vérifie $M^2 = M$,
4. pour toute base de E , la matrice M représentant u dans cette base vérifie $M^2 = M$.

On a un résultat analogue pour les symétries :

1. u est une symétrie,
2. $u^2 = \text{Id}_E$,
3. il existe une base de E dans laquelle la matrice M représentant u vérifie $M^2 = I_n$,
4. pour toute base de E , la matrice M représentant u dans cette base vérifie $M^2 = I_n$.

Théorème 8 | Matrices dans une base adaptée

1. Dans une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$, la matrice du projecteur sur F (supposé de dimension r) parallèlement à G (de dimension $n - r$) s'écrit par blocs :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

2. Dans une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$, la matrice de la symétrie

par rapport à F (supposé de dimension r) le long de G (de dimension $n - r$) s'écrit par blocs :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.7 — On en déduit notamment que le rang d'un projecteur est égal à sa trace : $\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$.