

Soutien 1 – Révisions sur les fonctions usuelles : exp et ln

1. FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 1 (Nombre de solutions et équations de base)

- Quel est le nombre de solutions de l'équation $e^x = k$ selon les valeurs du réel k ?
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
 - $e^x = 0$
 - $e^x = 1$
 - $e^x = e$
 - $e^x = \frac{1}{e}$

Exercice 2 (Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$)

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
 - $e^{3x+1} \times e^x = 1$
 - $\frac{e^{-x}}{e^{4-x}} = e$
 - $e^{5x+1} = 0$
 - $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
 - $\frac{e^x - 2}{e^x + 1} = 3$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
 - $e^{-x} \leq e$
 - $e^{x+1} > e^{3-2x}$
 - $\frac{1}{e^{2x}} < e^{x-3}$
 - $e^{2x} - e^x - 6 \geq 0$

Exercice 3 (Inconnue entière et applications) Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations et inéquations suivantes :

- $(1,05)^n \geq 2$ (Seuil de doublement d'un capital placé à 5% par an)
- $1 - (0,8)^n > 0,99$ (Nombre de tirages pour dépasser 99% de probabilité cumulée)
- $\frac{1 - (0,5)^{n+1}}{1 - 0,5} = 1,999$ (Somme d'une suite géométrique)

2. CALCUL DÉRIVÉ

Rappel de cours – Formules de dérivation

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

- $(e^u)' = u'e^u$
- $(\cos u)' = -u' \sin u$
- $(\sin u)' = u' \cos u$
- $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Si u est strictement positive sur I , alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exercice 4 (Entraînement à la dérivation) Après avoir déterminé l'ensemble sur lequel les fonctions suivantes sont dérivables, calculer leurs dérivées :

- $f : x \mapsto \exp(\cos x)$
- $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$
- $h : x \mapsto (e^x - \sin x)^2$

3. FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Rappel de cours – Définition de la fonction logarithme

Tout réel $x \in]0, +\infty[$ admet un unique antécédent par la fonction exponentielle. C'est la solution de l'équation $e^y = x$ d'inconnue y . On note $\ln x$ cette solution. Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $x \in]0, +\infty[$:

$$x = \ln y \iff e^x = y.$$

Les fonctions $\ln$ et $\exp$ sont réciproques l'une de l'autre :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in]0, +\infty[, \quad e^{\ln y} = y.$$

Du nouveau ! – Bijection et théorème de la bijection

Une application $f : I \rightarrow J$ est une **bijection** si tout élément de J possède un unique antécédent dans I . On note $f^{-1} : J \rightarrow I$ sa bijection réciproque.

Théorème de la bijection (cas continu) : Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors elle réalise une bijection de I vers $J = f(I)$.

Application : $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est continue et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection dont la réciproque est la fonction $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

Rappel de cours – Propriétés algébriques

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, et pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$:

- **Produit** : $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- **Inverse** : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- **Quotient** : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- **Puissance** : $\ln(a^n) = n \ln(a)$
- **Racine carrée** : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

Exercice 5 (Calculs et simplifications)

1. Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres suivants :
 - a) $A = \ln 6$
 - b) $B = \ln 16$

c) $C = \ln\left(\frac{8}{9}\right)$

d) $D = \ln(\sqrt{12})$

2. Écrire sous la forme d'un seul logarithme les expressions suivantes :

a) $E = \ln 3 + 2 \ln 5$

b) $F = \frac{1}{2} \ln 9 - 3 \ln 2$

c) $G = \ln(x+1) + \ln(x-1) - \ln(x^2)$ pour $x > 1$.

Du nouveau ! – Dérivées de $\ln x$ et $\ln u$

Pour tout $x > 0$ et toute fonction u dérivable et strictement positive :

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Du nouveau ! – Variations et ordre

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$\ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$

En particulier, pour tous $x, y \in]0, +\infty[$:

$$\ln x \leq \ln y \iff x \leq y, \quad \ln x < \ln y \iff x < y,$$

$$\ln x \leq 0 \iff x \leq 1, \quad \ln x \leq 1 \iff x \leq e.$$

Exercice 6 (Équations avec logarithmes)

1. $\ln(2x-3) = 0$
2. $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln 3$
3. $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$

Exercice 7 (Inéquations avec logarithmes)

1. $\ln(3x+1) \leq 2$

2. $\ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right) > 0$
3. $\ln(2x+5) \leq \ln(x^2-1)$

Exercice 8 (Étude d'une fonction logarithme) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$.

1. Justifier que le trinôme $x^2 - 4x + 5$ est strictement positif pour tout réel x .
2. Calculer la fonction dérivée f' de f et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+5}$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f (sans calculer les limites).
5. En déduire l'existence d'un minimum global pour la fonction f et préciser sa valeur.

4. VERS LA SEMAINE PROCHAINE : LA RÉCURRENCE

Rappel de cours – Principe de récurrence

Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

- **Initialisation** : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq n_0$ fixé, puis on montre sous cette hypothèse que $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 9 (Somme des premiers entiers) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 10 (Inégalité de Bernoulli) Soit $a > 0$ un réel fixé. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

Exercice 11 (Démonstration de divisibilité) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.