

# CHAPITRE 3

## Polynômes

### 1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS ANALYTIQUES

#### Définition 1 | Polynôme à coefficients réels

Un **polynôme** (ou fonction polynomiale) à coefficients réels est une fonction  $P : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telle qu'il existe un entier  $n$  et des réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que pour tout réel  $x$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Les réels  $a_k$  sont appelés les **coefficients** du polynôme.

**Remarque 1.1** — La construction formelle des polynômes (pas au programme) fait que l'on note usuellement la variable d'un polynôme  $X$  (avec une majuscule), c'est-à-dire

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

Avec cette notation, le polynôme  $X^k$  est la fonction  $f : x \mapsto x^k$ .

En classe préparatoire B/L, on ne fera pas de distinction entre le polynôme et la fonction associée : on favorisera donc l'utilisation de la notation  $x^k$ .

#### Notation

L'ensemble des polynômes réels est noté  $\mathbf{R}[x]$ .

#### Définition 2 | Degré d'un polynôme

- Si  $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  est un polynôme avec  $a_n \neq 0$ , on dit que  $P$  est un polynôme de **degré**  $n$ . On le note  $\deg(P) = n$ . Par convention, le degré du polynôme nul est  $\deg(0) = -\infty$ .
- $a_n$  est le **coefficient dominant** du polynôme.
- Un polynôme est **unitaire** si son coefficient dominant est 1.

#### Exemple 1 —

1. Le degré du polynôme  $P = 5$  (polynôme constant égal à 5) est 0.
2. Le degré du polynôme  $x^{10} + x^5 - 3$  est 10.
3. Le degré du polynôme  $(c^2 - 1)x^2 + (c - 1)x + 20$  dépend du paramètre réel  $c$ . Cela peut être 2, 1 ou 0.

### Théorème 1 | Limites en l'infini

Soit  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  un polynôme **non constant** (donc  $n$ , le degré de  $P$ , est supérieur ou égal à 1). Alors :

- si  $n$  est pair,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}.$$

- si  $n$  est impair,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_n > 0 \\ +\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}.$$

**Remarque 1.2** — Si le polynôme est constant, ses limites en l'infini sont faciles à calculer. Attention à la gestion de cas particuliers, et aux justifications, quand les exercices ont un cadre un peu plus théorique. Un exemple peut être : soit  $P$  un polynôme, déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x)P(x)$ .

**Remarque 1.3** — Retenez que dans le cas pair, les limites sont infinies et égales, et que dans le cas impair, elles sont infinies et opposées. Retrouvez ensuite facilement les valeurs en retenant que

$$\lim P(x) = \lim a_n x^n \text{ en l'infini.}$$

**Remarque 1.4** — Tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle. Entraînez-vous à le rédiger à l'aide des limites et du théorème des valeurs intermédiaires.

## 2. OPÉRATIONS ET PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Sur les polynômes, on peut faire les mêmes opérations usuelles que sur les fonctions : l'addition (ou des combinaisons linéaires), la multiplication et la composition.

### Méthode (Addition de polynômes)

Soient  $P = \sum_{k=0}^n p_k x^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^m q_k x^k$  deux polynômes réels.  $P + Q$  est le polynôme

$$(P + Q)(x) = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (p_k + q_k) x^k$$

où on a complété par des 0 les  $p_k$  et  $q_k$  non définis. On retiendra que le coefficient de degré  $k$  de  $P + Q$  est  $p_k + q_k$ .

**Exemple 2** — Calculer les sommes  $P + Q$  avec

1.  $P(x) = 5x^2 + 3x + 1$  et  $Q(x) = -x^2 + 4$ ,
2.  $P(x) = (x - 1)^2$  et  $Q(x) = -(x + 1)^2$ .

### Méthode (Multiplication de polynômes)

Soient  $P = \sum_{k=0}^n p_k x^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^m q_k x^k$  deux polynômes réels.  $PQ$  est le polynôme donné par  $(PQ)(x) = P(x) \times Q(x)$ . Formellement on a

$$\begin{aligned} (PQ)(x) &= \sum_{k=0}^n p_k x^k \times \sum_{j=0}^m q_j x^j \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{j=0}^k p_j q_{k-j} x^k. \end{aligned}$$

**Remarque 2.1** — En pratique, on calculera rarement les produits de polynômes avec cette formule.

**Exemple 3** — Calculer les produits  $P \times Q$  avec

1.  $P(x) = 3x^2 + 2x + 1$  et  $Q(x) = x^4 - 1$ ,
2.  $P(x) = x - 1$  et  $Q(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ .



### Méthode (Composition de deux polynômes)

Soient  $P = \sum_{k=0}^n p_k x^k$  et  $Q = \sum_{k=0}^m q_k x^k$  deux polynômes réels. Le polynôme composé  $P \circ Q$  est défini par

$$\begin{aligned} P \circ Q(x) &= P(Q)(x) \\ &= \sum_{k=0}^n p_k \left( \sum_{j=0}^m q_j x^j \right)^k \end{aligned}$$

**Exemple 4 —** Calculer  $P \circ Q$  et  $Q \circ P$  avec

1.  $P(x) = x^2$  et  $Q(x) = x + 1$ ,
2.  $P(x) = 1$  et  $Q(x) = x^3 - 2$ .

### Proposition 1 | Lien avec le degré

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes, alors

1.  $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ . Si les deux polynômes sont de degrés différents, on a égalité. Sinon, il faut vérifier.
2.  $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ . Le coefficient dominant de  $PQ$  est le produit des coefficients dominants.
3. Si  $Q$  n'est pas constant,  $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$ . Si  $P$  est de degré  $n$  et de coefficient dominant  $a$ , et si  $Q$  a pour coefficient dominant  $b$ , alors le coefficient dominant de  $P \circ Q$  est  $a b^n$ .

**Exemple 5 —**

1. Si  $P = x^2 + 1$  et  $Q = x^3 + x$ ,  $\deg P = 2$ ,  $\deg Q = 3$  et  $\deg(P + Q) = 3$ .
2. Si  $P = x^2 + 2x$  et  $Q = -x^2 + 12$ ,  $P + Q = 2x + 12$ . On a bien  $\deg(P + Q) < 2$ .
3. Si  $P = x^2 + 1$  et  $Q = x^3 + x$ ,  $PQ = x^5 + 2x^3 + x$ .  $\deg(PQ) = 5 = 2 + 3 = \deg P + \deg Q$ .
4. Si  $P = 2x^2$  et  $Q = x^3 + 2x$ , on a  $P \circ Q = 2(x^3 + 2x)^2 = 2x^6 + 8x^4 + 8x^2$  de degré 6 qui correspond bien à  $\deg P \times \deg Q = 2 \times 3$ .

### Corollaire 1

Si  $PQ = 0$  alors  $P = 0$  ou  $Q = 0$ .

### 3. STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

#### Définition 3 | Espace $\mathbf{R}_n[x]$

On note  $\mathbf{R}_n[x]$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . Formellement il s'écrit

$$\mathbf{R}_n[x] = \{P(x) \in \mathbf{R}[x], \deg(P) \leq n\}.$$

#### Théorème 2 | $\mathbf{R}_n[x]$ est un espace vectoriel

Soit  $n \in \mathbf{N}$ .  $\mathbf{R}_n[x]$  est un espace vectoriel de dimension  $n + 1$ . Une base est donnée par  $(x^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ .

**Remarque 3.1** — L'isomorphisme entre  $\mathbf{R}_n[x]$  et  $\mathbf{R}^{n+1}$  est donné par

$$(a_0, \dots, a_n) \mapsto P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

**Remarque 3.2** — On utilisera souvent la propriété

$$P \in \mathbf{R}_n[x] \iff \exists (ou \exists!) (a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}, \forall x \in \mathbf{R}, P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Cela permet de nommer les coefficients de  $P$  avant de pouvoir travailler avec. Ainsi on se ramènera souvent à de l'algèbre linéaire dans  $\mathbf{R}^{n+1}$ .

#### Vocabulaire

Cette dernière base s'appelle **la base canonique de  $\mathbf{R}_n[x]$** .

#### Définition 4

Une famille de polynômes non nuls est dite étagée si ses polynômes sont de degrés deux à deux distincts.

#### Théorème 3

Une famille de polynômes étagée est libre.

**Remarque 3.3** — Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  et  $(P_0, \dots, P_n)$  une famille de polynômes telle que  $\deg P_k = k$ , alors  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbf{R}_n[x]$ .

**Remarque 3.4** —  $\mathbf{R}[x]$  est ce qu'on appelle **un espace vectoriel de dimension infinie**.

**Corollaire 2 | Théorème d'identification des coefficients**

1. Si un polynôme vérifie que pour tout réel  $x$ ,  $P(x) = 0$ , alors tous ses coefficients sont nuls.
2. Si pour tout  $x$ ,  $P(x) = Q(x)$ , alors les polynômes  $P$  et  $Q$  ont les mêmes coefficients.

**Remarque 3.5** — Cela justifie la méthode d'identification des coefficients déjà largement utilisée dans les exercices.

**4. DÉRIVATION DE POLYNÔMES****Définition 5 | Polynôme dérivé**

Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbf{R}[x]$ , on définit son polynôme dérivé

$$\begin{aligned} P'(x) &= \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k \end{aligned}$$

**Exemple 6** — Calculer  $P'(x)$  avec

1.  $P(x) = x^3 - 1$ ,
2.  $P(x) = \sum_{k=0}^n k x^k$ .

**Remarque 4.1** — Cette définition coïncide avec la dérivation sur les fonctions.

**Proposition 2 | Opérations sur les dérivées**

Soient  $(P, Q) \in \mathbf{R}[x]^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ ,

1.  $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$
2.  $(PQ)' = P'Q + Q'P$ ,
3.  $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$ ,
4.  $P' = 0 \iff P$  est un polynôme constant.

**Proposition 3 | Degré du polynôme dérivé**

1. Si  $P$  est un polynôme de degré  $n \in \mathbf{N}^*$ , alors  $\deg P' = n - 1$ .
2. Si  $P$  est constant (de degré 0 ou  $-\infty$ ), alors  $P' = 0$  et  $\deg P' = -\infty$ .

**Définition 6 | Dérivées d'ordre supérieur**

Soit  $P \in \mathbf{R}[x]$ , les dérivées successives de  $P$  sont les polynômes définis par

$$P^{(k)}(x) = \begin{cases} P(x) & \text{si } k = 0 \\ P'(x) & \text{si } k = 1 \\ (P^{(k-1)})'(x) & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

**Exemple 7 —** Calculer la dérivée du polynôme

$$P(x) = 1 + x^2 + 5x^5 + \frac{x^4}{12}.$$

**Exemple 8 — Dérivées des monômes** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P(x) = x^n$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$P^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}.$$

**Théorème 4**

Si  $P \in \mathbf{R}[x]$  est un polynôme de degré  $n$ , alors

$$\forall k > n, P^{(k)}(x) = 0.$$

En particulier  $P^{(n+1)}(x) = 0$ .

**5. RACINES D'UN POLYNÔME****5.1. Racines****Définition 7 | Racine d'un polynôme**

Soit  $P \in \mathbf{R}[x]$  et  $\alpha \in \mathbf{R}$ . On dit que  $\alpha$  est une **racine** de  $P$  si  $P(\alpha) = 0$ .

**Exemple 9 —**

1. Les racines de  $x^2 - 1$  sont 1 et  $-1$ .
2.  $x^4 + x^2 + 15$  n'a pas de racine.

3.  $P = 5$  n'a pas de racine.
4.  $P = 5(x-1)(x-2)(x+2)$  a trois racines : 1, 2, -2.
5.  $P = 12x^2(x-3)$  a deux racines 0 et 3.
6.  $P = 0$  a une infinité de racines. C'est le seul polynôme à avoir une infinité de racines.

### Théorème 5 | Factorisation par une racine

Soit  $P \in \mathbf{R}[x]$  et  $\alpha \in \mathbf{R}$ , on a l'équivalence

$$P(\alpha) = 0 \iff \exists Q \in \mathbf{R}[x], P(x) = (x - \alpha)Q(x).$$

Autrement dit,  $\alpha$  est une racine de  $P$  si et seulement si  $(x - \alpha)$  divise  $P$ .

**Remarque 5.1** — Le théorème se généralise avec plusieurs racines.

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ sont des racines distinctes de } P \iff \exists Q \in \mathbf{R}[x], P(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)Q(x).$$

On a vu dans un chapitre précédent comment factoriser un polynôme quand on a trouvé une de ses racines. Rappelons comment on peut faire :

1. Si  $P = \sum_{k=0}^n p_k x^k$  est un polynôme **de degré**  $n$  et si  $P(\alpha) = 0$ , alors on cherche à écrire

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) \text{ avec } Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} q_k x^k.$$

On développe le produit et en identifiant coefficient à coefficient, on établit un système dont la résolution donne les réels  $q_k$ . Il peut être utile de remarquer qu'en étudiant les termes de degré  $n$  et 0 on trouve rapidement  $q_{n-1} = p_n$  et  $p_0 = -\alpha q_0$ .

2. Autre solution, on réalise la division euclidienne de  $P$  par  $(x - \alpha)$ . Le quotient donne  $Q$  et on peut vérifier ne pas avoir fait d'erreurs de calculs en obtenant un reste nul.

**Exemple 10** — *Factoriser le polynôme*  $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2$

### Définition 8 | Multiplicité d'une racine

Soit  $P \in \mathbf{R}[x]$  et  $\alpha$  une racine de  $P$ . L'ordre de multiplicité de la racine  $\alpha$  est le plus grand entier  $k \in \mathbf{N}^*$  tel que

$$\exists Q \in \mathbf{R}[x], P(x) = (x - \alpha)^k Q(x)$$

ou de façon équivalente l'unique entier  $k$  tel que

$$\exists Q \in \mathbf{R}[x], P(x) = (x - \alpha)^k Q(x) \text{ et } Q(\alpha) \neq 0.$$

## Σ Vocabulaire

1. Une racine d'ordre 1 est appelée une **racine simple**,
2. Une racine d'ordre 2 est appelée une **racine double**,
3. Une racine d'ordre 3 est appelée une **racine triple** ...

### Exemple 11 —

1.  $P(x) = (x - 3)^2(x - 2)^{1000}$  admet 3 pour racine de multiplicité 2 et 2 pour racine de multiplicité 1000.
2.  $P(x) = x^2 - 6x + 9$  admet une seule racine double, c'est 3.
3.  $P(x) = 2x^2 - 6x + 4$  admet deux racines simples : 1 et 2.

### Théorème 6 | Lien multiplicité - dérivées

Soit  $P \in \mathbf{R}[x]$  et  $\alpha$  une racine de  $P$ . On a l'équivalence

$$\alpha \text{ est une racine d'ordre } k \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(k)}(\alpha) \neq 0.$$

**Exemple 12 —** Soit  $P = x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4$ . Montrer que 1 est une racine de multiplicité 3 de  $P$ . Ensuite, factoriser  $P$ .

### Théorème 7

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  et soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  ses racines de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_k$ . On a

$$\sum_{i=1}^k m_i \leq n.$$

On en déduit le théorème suivant **très important**.

### Théorème 8

Si  $P \in \mathbf{R}_n[x]$  a au moins  $n + 1$  racines, alors  $P = 0$ .

**Exemple 13 —** Soit  $n \geq 2$  et  $P \in \mathbf{R}_n[x]$  tel que pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $P(k) = k^2$ . Montrer que  $P(x) = x^2$ .

**Exemple 14 —** Soit  $P \in \mathbf{R}[x]$  tel que

$$\int_0^1 P(x)^2 dx = 0.$$

Montrer que  $P$  est le polynôme nul.

**Corollaire 3**

Si  $P \in \mathbf{R}_n[x]$  et si la somme des multiplicités de ses racines est strictement plus grande que  $n$ , alors  $P = 0$ .

**5.2. Applications**

Le théorème de factorisation permet d'étudier localement un polynôme autour d'une de ses racines ou d'une des racines de sa dérivée.

**Proposition 4**

Un polynôme change de signe en une racine si et seulement si sa multiplicité est impaire.

Pour la prochaine propriété, on rappelle une définition.

**Définition 9 | Extremum local**

Soit  $f$  une fonction réelle et  $x_0 \in \mathbf{R}$ . On dit que  $f$  admet un extremum (minimum, maximum) local en  $x_0$  si et seulement s'il existe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $f$  restreinte à  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$  admet un extremum (minimum, maximum) en  $x_0$ .

**Proposition 5**

Un polynôme  $P$  admet un extremum local en  $x_0$  si et seulement si  $x_0$  est une racine de  $P'$  de multiplicité impaire.

**Remarque 5.2** — En particulier si  $P'(x_0) = 0$  et  $P''(x_0) \neq 0$ ,  $P$  admet bien un extremum local en  $x_0$ . C'est un minimum si  $P''(x_0) > 0$  et un maximum sinon.

**Remarque 5.3** — Le résultat de la dernière remarque fonctionne en général pour toute fonction dérivable sur un intervalle ouvert, si ce n'est que le mot racine n'est pas à utiliser dans ce contexte. Nous le démontrerons dans le chapitre sur les développements limités.

## 6. COMPLÉMENTS

### 6.1. Division euclidienne

#### Théorème 9 | Division euclidienne de polynômes

Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes réels avec  $B \neq 0$ , alors il existe un unique couple de polynômes réels  $(Q, R)$  avec  $\deg(R) < \deg(B)$  tel que

$$A = QB + R.$$

On appelle  $Q$  le quotient de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  et  $R$  son reste.



#### Méthode (Réaliser une division euclidienne de polynômes)

On souhaite réaliser la division euclidienne de  $A$  par  $B$ . Il s'agit de trouver le quotient  $Q$  et le reste  $R$ . On vérifie d'abord le cas trivial où  $\deg(A) < \deg(B)$  auquel cas la division euclidienne est donnée par

$$A = 0 \times B + A,$$

donc  $Q = 0$  et  $R = A$ .

Dans le cas général, on rédige comme une division euclidienne d'entiers en cherchant les coefficients du polynôme  $Q$  en commençant par celui de degré  $\deg(A) - \deg(B)$  (qui est le degré de  $Q$ ) puis en descendant.

#### Exemple 15 —

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 2x^2 + x + 3 & x^2 - x + 1 \\ -6x^3 + 6x^2 - 6x & 6x + 4 \\ \hline 4x^2 - 5x + 3 & \\ -4x^2 + 4x - 4 & \\ \hline -x - 1 & \end{array}$$

**Exemple 16 —** *Réaliser la division euclidienne de  $A$  par  $B$  et  $B$  par  $A$  où  $A = 5x^3 + 2x^2 + 1$  et  $B = x^2 + 10x$ .*

#### Proposition 6 | Exemples à connaître

Le reste de la division euclidienne d'un polynôme  $P$  par

- un polynôme de degré 1,  $B(x) = ax + b$  (avec  $a \neq 0$ ) est  $R = P(\frac{-b}{a})$  (polynôme constant),

2. le polynôme  $(x - a)$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) est  $P(a)$  (polynôme constant),
3. le polynôme  $(x - a)^2$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) est le polynôme  $R(x) = P'(a)(x - a) + P(a)$ .

**Exemple 17** — Avec des méthodes analogues, retrouver le reste de la division de  $P$  par  $(x - a)(x - b)$  où  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$  sont des réels distincts.

### Définition 10

Soit  $A \in \mathbf{R}[x]$  et  $B \in \mathbf{R}[x]$ . On dit que  $B$  divise  $A$  si et seulement si le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est le polynôme nul. Alors il existe un polynôme  $Q$  tel que  $A = QB$ .

## 6.2. Formule de Taylor

Les polynômes de degré  $n$  sont définis par  $n + 1$  coefficients. En quelque sorte, cela nous dit qu'on a  $n + 1$  degrés de liberté pour fixer un polynôme de  $\mathbf{R}_n[x]$ . On peut faire porter ces degrés de liberté sur d'autres nombres, comme les  $P(a_i)$  des réels fixés  $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$  (voir l'interpolation de Lagrange en TD) ou les  $P^{(k)}(a)$  où  $a \in \mathbf{R}$  est fixé et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . C'est le sujet du prochain théorème.

### Théorème 10

Soit  $P \in \mathbf{R}_n[x]$  et  $a \in \mathbf{R}$ , alors

$$\begin{aligned} P(x) &= P(a) + P'(a)(x - a) + \frac{P''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k. \end{aligned}$$

## 6.3. Factorisation de polynômes réels

On connaît explicitement la factorisation des polynômes réels.

### Théorème 11 | Factorisation des polynômes réels

Tout polynôme réel non nul  $P \in \mathbf{R}[x]$  peut s'écrire

$$P(x) = a_n \prod_{i=1}^m (x - \alpha_i)^{k_i} \prod_{j=1}^p (x^2 + b_j x + c_j)$$

où

- $a_n$  est le coefficient dominant de  $P$ ,

- les  $\alpha_i$  sont les racines réelles distinctes de  $P$ , de multiplicité  $k_i \in \mathbf{N}^*$ ,
- les polynômes  $x^2 + b_j x + c_j$  sont des trinômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.