

CHAPITRE 23

Développements limités

1. DÉFINITIONS

1.1. Notion de développement limité

Définition 1 | Développement limité

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0 . On dit que f admet un développement limité en x_0 (ou au voisinage de x_0) à l'ordre n s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels qu'au voisinage de x_0 ,

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Autrement dit, il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels qu'au voisinage de x_0 ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

où ϵ est une fonction qui tend vers 0 en x_0 .



Vocabulaire

La partie

$$\sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$$

est appelée **partie régulière du développement limité**. Les réels $a_0, \dots, a_n$ sont appelés les **coefficients du développement limité**.

Remarque 1.1 — Soit f une fonction dérivable en x_0 . Alors par définition $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers $f'(x_0)$ lorsque x tend vers 0. Posons alors $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$. Regardons la quantité $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)$. On a

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - a_0}{x - x_0} - a_1.$$

Par définition de la dérivée, $\frac{f(x)-a_0}{x-x_0}$ tend vers a_1 en x_0 , donc la différence tend vers 0. Ainsi le quotient

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)}{x - x_0}$$

tend vers 0, ce qui signifie que $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) = o_{x_0}(x - x_0)$. Ainsi

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0).$$

Cela justifie que toute fonction dérivable en x_0 admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 . Celui-ci est donné par $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$.

Exemple 1 — Donner un développement limité des fonctions suivantes en 0, à l'ordre 1

1. $\exp$,
2. $\sin$,
3. $\cos$,
4. $x \mapsto \ln(1+x)$.

Théorème 1 | Unicité du développement limité

Si une fonction f admet un développement limité en x_0 à l'ordre n , alors celui-ci est unique. C'est à dire que si $a_0, \dots, a_n$ et $b_0, \dots, b_n$ sont des réels qui donnent le DL, alors pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $a_k = b_k$.

Remarque 1.2 — Tous les DL sont des DL en zéro Un DL de f en a est un DL de $h \mapsto f(a+h)$ en zéro. En effet, si :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^k),$$

en posant $h = x - a$ qui "tend vers zéro si x tend vers a "

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^n a_k h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^k).$$

1.2. Formule de Taylor-Young

Théorème 2 | Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de classe C^∞ au voisinage de x_0 . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, elle admet un développement limité en x_0 et celui-ci est donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Remarque 1.3 — Pour des petits ordres, cela donne :

1. ordre 0 : $f(x) = f(x_0) + o_{x_0}(1)$ (parfaitement inutile)
2. ordre 1 : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$
3. ordre 2 : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o_{x_0}((x - x_0)^2)$.

Remarque 1.4 — Cette formule fournira la plupart des développements limités. A l'ordre 3, en zéro, elle s'écrit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{6} + o_0(x^3).$$

Avec cette formule, vous pouvez normalement résoudre tous les exercices qui vous seront donnés en B/L sur ce sujet.

2. OPÉRATION SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

2.1. Opérations algébriques

Somme, produit Les deux méthodes suivantes sont à maîtriser formellement

Proposition 1 | Somme de DL

Soient f et g deux fonctions qui admettent un DL à l'ordre n en x_0 , alors $f + g$ aussi. De plus, le DL de $f + g$ est donné en faisant la somme des parties régulières de ceux de f et g . En d'autres termes, si

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n) \text{ et}$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

alors

$$(f + g)(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k)(x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Exemple 2 — Si $f(x) = 5 + 4(x - x_0) - 2(x - x_0)^2 + o_{x_0}((x - x_0)^2)$ et $g(x) = -1 + 2(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$, quel DL de $f + g$ peut on donner en x_0 ?

Proposition 2 | Produit de DL

Soient f et g deux fonctions qui admettent un DL à l'ordre n en x_0 , alors $f \times g$ aussi. De plus, le DL de $f \times g$ est donné en faisant le produit des parties régulières de ceux de f et g , puis en tronquant la somme au degré n .

Exemple 3 — (Pour $x_0 = 0$). Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o_0(x^2)$ et $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + o_0(x^2)$. On fait alors le produit en remarquant que $x^\alpha o_0(x^\beta) = o_0(x^{\alpha+\beta})$. Dès qu'un terme est de degré supérieur ou égal à 2, on ne le prend pas en compte!. On obtient

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + o(x^2) \\ + \text{des termes de degré supérieur à deux}$$

Composition Si

1. f admet un DL en a
2. g admet un DL en b
3. $f(a) = b$

Alors on peut "composer les DL" pour obtenir un DL de $g \circ f$ en a . Par exemple

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{x+1}} &= \exp\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= e \times \exp\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\ &= e \times \left(1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^2)\right) \\ &= e \left(1 + \frac{1}{2}x + o(x^2)\right) \\ &= e + \frac{e}{2}x + o(x^2) \end{aligned}$$

Quotient de DL. On peut faire un quotient de DL en composant avec le DL de

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \ln(1+x)} &= \frac{1}{1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\ x \mapsto \frac{1}{1+x} \text{ ou } x \mapsto \frac{1}{1-x}. \text{ Par exemple,} &= 1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) + \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^2 + o(x^2) \\ &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2 + o(x^2) \\ &= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Attention, il est difficile de prévoir de quel ordre il faut prendre les DL des numérateurs et dénominateurs pour obtenir un DL d'ordre voulu pour le quotient.

2.2. Intégration des développements limités

Théorème 3 | Intégration des développements limités

Si f admet le DL à l'ordre n

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n),$$

alors on obtient le DL de la primitive f s'annulant en a à l'ordre $n+1$:

$$\int_a^x f(t) dt = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} (x-a)^k + o_a((x-a)^{n+1}).$$

Remarque 2.1 — Théorème admis.

Remarque 2.2 — Ce théorème se formule aussi ainsi : soit F une primitive de f , on a son DL à l'ordre $n+1$ en a donné par

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=1}^n a_{k-1} (x-a)^k + o_x((x-a)^{n+1}).$$

Remarque 2.3 — En fait, ce théorème est facile à utiliser sur les petits ordres : on intègre simplement le DL. Le terme "petit o" s'intègre de $o((x-a)^n)$ en $o((x-a)^{n+1})$

car la constante multiplicative ne compte pas dans le petit o. Par exemple (en zéro) : si $f(x) = 1 + 2x - x^2 + o(x^2)$ alors une primitive de F a pour DL

$$F(x) = F(0) + x + x^2 - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

3. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

Les développements limités de cette partie sont à connaître ou savoir retrouver rapidement. Il est notamment attendu des les connaître parfaitement à l'ordre 3 car c'est de le cadre de la majorité des exercices.

3.1. Développements limités issus de la formule de Taylor-Young

Exponentielle Les fonctions exp et ln sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définitions, elles admettent donc des développements limités.

Proposition 3 | DL de l'exponentielle

La fonction exponentielle admet un DL en 0 à tous les ordres. A l'ordre n il est donné par

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n).$$

Les fonctions trigonométriques. Les fonctions cos et sin sont C^∞ sur $\mathbf{R}$. Elles admettent donc des DL en tout point et à tout ordre. On retiendra les DL en zéro.

Proposition 4 | DL de cos et sin

Les DL de cos et sin à l'ordre n en zéro sont donnés par

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^n),$$

et

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^n).$$

Remarque 3.1 — Pour les retenir :

- Pour cos, on prend la partie paire du DL de l'exponentielle. Pour sin, la partie impaire.
- Dans les deux cas, on alterne les signes.

Exemple 4 — Par exemple, le DL à l'ordre 7 de sin est donné par

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o_0(x^7) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{720} + o_0(x^7).\end{aligned}$$

Remarque intéressante, c'est aussi son DL à l'ordre 8 car le terme de degré 8 est nul : on peut remplacer $o(x^7)$ par $o_0(x^8)$.

Le DL de cos à l'ordre 2 est lui donné par

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2).$$

Remarque 3.2 — On pourra retenir

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n+1})$$

et

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2n+2}).$$

Exemple 5 — Déterminer la limite de $\frac{\sin(x)-x}{x^3}$ lorsque x tend vers 0.

Les fonctions puissances Les fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sont de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$. Elles admettent donc des DL de tout ordre.

Proposition 5

Les fonctions puissances $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \neq 0$ admettent en 0 un DL de tout ordre. Si $n \in \mathbb{N}$ est fixé, le DL d'ordre n est donné par

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_0(x^n).$$

Corollaire 1

En particulier, il faut savoir reconnaître et utiliser les DL :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_0(x^n)$$

et

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o_0(x^n).$$

On utilisera aussi le début du DL suivant :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

Remarque 3.3 — La composition des DL n'est pas au programme, mais on peut "substituer" une variable dans un DL. Par exemple, en substituant x par x^2 dans le dernier DL on obtient

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o_0(x^{2n}),$$

ce qui donne un DL à l'ordre $2n$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

3.2. Développements limités obtenus par intégration.

Logarithme Le développement limité s'obtient par intégration de celui de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Proposition 6 | DL de $\ln$

Les fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1-x)$ admettent des DL en 0 à tous les ordres. A l'ordre n ils sont donnés par

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o_0(x^n)$$

et

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o_0(x^n).$$

Remarque 3.4 — On pourra les retenir sous la forme

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o_0(x^n)$$

et

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o_0(x^n).$$

Exemple 6 — Déterminer la limite en 0 de l'expression

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{\ln(1+h)}.$$

Fonction tangente Le DL à l'ordre $2n+1$ de tangente s'obtient par intégration de son DL d'ordre $2n-1$ et grâce à la formule $\tan' = 1 + \tan^2$.

Proposition 7 | DL de tan

Le DL de tan en 0 à l'ordre 3 est donné par

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3).$$

Remarque 3.5 — A l'ordre 5 on obtient $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + o_0(x^5)$.

Remarque 3.6 — Ce DL peut aussi s'obtenir par quotient, ce sera fait en exercice.

4. APPLICATIONS

Afin de présenter des applications très utiles des développements limités, on présente le résultat suivant.

Théorème 4

Si f admet un développement limite en x_0 donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o(x^n) \text{ avec au moins un terme non nul,}$$

alors, si a_k est le premier terme non nul du DL on a

$$f(x) \sim_{x_0} a_k (x - x_0)^k.$$

4.1. Positions relatives de courbes

Le développement limité d'une fonction donne l'allure de sa courbe représentative! Très logiquement, la tangente à la courbe est donnée par l'équation

$$y = a_1(x - x_0) + a_0.$$

Ce qui va nous intéresser désormais est la position relative de la courbe par rapport à cette tangente. Pour cela on regardera le premier terme non nul (s'il existe) dans le développement limité. On supposera désormais que f admet en x_0 un DL

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + o_{x_0}(x^k).$$

La position par rapport à la tangente est alors donnée par le signe de a_k : pour cela on regarde la quantité

$$f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + o_{x_0}(x^k)$$

ce qui donne

$$f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) \sim_{x_0} a_k(x - x_0)^k.$$

Théorème 5

Sous les hypothèses précédentes :

1. Si k est pair, la courbe C_f et la tangente ont la même position relative des deux côtés.
 - Si $a_k > 0$, la courbe est au dessus.
 - Si $a_k < 0$ elle est en dessous.
2. Si k est impair la courbe C_f et la tangente ont des positions relatives différentes des deux côtés.

- Si $a_k > 0$, la courbe est au dessus à droite et en dessous à gauche.
- Si $a_k < 0$, la courbe est au dessous à droite et en dessus à gauche.

Exemple 7 — Sinus et cosinus en 0

1. Le développement limité de cos en 0 donne

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + 0x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Cela donne une tangente en 0 horizontale d'équation $y = 0x + 1 = 1$. De plus $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc le premier terme prépondérant de la différence est toujours négatif, donc des deux cotés, la courbe est sous la tangente.

2. Le développement limité de sin en 0 donne

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 0 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Cela donne une tangente en 0 horizontale d'équation $y = x$. De plus $\sin(x) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$ donc le premier terme prépondérant **change de signe**, donc la courbe sera de part et d'autre de la tangente au voisinage de 0. Si $x > 0$, la différence est négative, donc la courbe est sous la tangente. Si $x < 0$, c'est le contraire.

4.2. Calcul de limites et recherche d'équivalents

Les développements limités permettent d'obtenir des limites pour lesquelles les équivalents usuels n'étaient pas assez précis. C'est utile quand on a une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Par exemple, comment déterminer la limite de $\frac{\sin(x)-x}{x^3}$ en 0. On remplace $\sin(x)$ par son DL et on obtient

$$\frac{\sin(x)-x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} - x + o(x^3)}{x^3} = -\frac{x^3}{6x^3} + \frac{o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1).$$

Donc la limite est $-\frac{1}{6}$.

Exemple 8 — Soit a_n une suite qui tend vers 0 (sans prendre la valeur 0). Déterminer la limite de $\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}$.

Si on n'obtient pas forcément de limite, on peut tout de même obtenir un équivalent. Par exemple, étant donné que $\frac{\sin(x)-x}{x^3}$ tend vers 0, on peut déduire que $\frac{\sin(x)-x}{x^2}$ tend vers 0. On peut se demander par quel signe et à quelle vitesse. Le DL nous donne

$$\frac{\sin(x)-x}{x^2} = \frac{-x^3}{6x^2} + \frac{o(x^3)}{x^2} = -\frac{x}{6} + o(x).$$

On en déduit donc que $\frac{\sin(x)-x}{x^2} \sim -\frac{x}{6}$.

Exemple 9 — Afin de calculer les limites, il ne faut pas hésiter à faire de petit changement de variable. Par exemple, en réalisant le changement de variable $1+h=x$, on peut déterminer la limite en 1^+ de

$$\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}.$$

(Remarque : sans faire de changement de variable ici, on peut s'en sortir avec la formule de Taylor-Young.)

4.3. Développements asymptotiques, asymptotes oblique

Pour certaines fonctions, on pourra déduire d'un développements limité ce qu'on appelle un **développements asymptotique**. En toute généralité, si une fonction f admet un DL d'ordre n en zéro que l'on notera

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^k)$$

alors la fonction $g : x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ vérifiera

$$g(x) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{x^k} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x^k}\right).$$

C'est ce qu'on appelle un le développement **asymptotique d'une fonction**. On s'intéressera surtout à un cas particulier, le cas des **asymptotes obliques**.

Définition 2 | Asymptote oblique

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[m, +\infty[$, on dit que la courbe représentative (C_f) de f admet un asymptote oblique en $+\infty$ s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax - b = 0.$$

Son asymptote oblique est alors la droite d'équation $y = ax + b$.

Remarque 4.1 — Cette définition fonctionne en $-\infty$ en faisant les changements qui s'imposent.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax - b = 0$$

revient à dire que

$$f(x) = ax + b + o_{x \rightarrow +\infty}(1).$$

Pour obtenir **la position relative de (C_f) par rapport à l'asymptote**, il faut préciser ce $o(1)$: on va chercher une fonction h de signe connu, et tendant vers 0 tel que

$$f(x) = ax + b + h(x) + o_{x \rightarrow +\infty}(h(x)).$$

Si h est positive, alors la courbe de la fonction sera au-dessus de l'asymptote, et h est négative elle sera en dessous.

Même dans le cas où h change de signe une infinité de fois, on peut dire que la courbe traverse l'asymptote une infinité de fois!

Exemple 10 — Trouver l'asymptote oblique en $+\infty$ de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x} + x + 1$

Exemple 11 — Trouver l'asymptote oblique en $+\infty$ de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

4.4. Étude de la fonction de Gauss.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$e^{-1/2}$		
$f'(x)$		+	+	0	-	-	
$f''(x)$		+	0	-	-	0	+
f							

