

Soutien 2 – Révisions sur les fonctions usuelles : exp et ln

1. DÉMONSTRATIONS PAR RÉCURRENCE

Rappel de cours – Principe de récurrence

Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

- **Initialisation** : On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq n_0$ fixé, puis on montre sous cette hypothèse que $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 1 (Somme des premiers entiers) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Pour $n = 1$: $\sum_{k=1}^1 k = 1$ et $\frac{1 \times 2}{2} = 1$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 (Somme des premiers carrés) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Initialisation. Pour $n = 1$: $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1$ et $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Comme $2n+3 = 2(n+1) + 1$, c'est exactement $P(n+1)$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 (Inégalité de Bernoulli) Soit $a > 0$ un réel fixé. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: $\acute{n} (1+a)^n \geq 1+na \acute{z}$.

Initialisation. Pour $n = 0$: $(1+a)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0 \times a$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ est vraie. Comme $1+a > 0$, on peut multiplier l'inégalité $P(n)$ par $1+a$ sans changer son sens :

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a,$$

car $na^2 \geq 0$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 (Démonstration de divisibilité) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: $\acute{n}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $3^{2n} - 1 = 8k \acute{z}$.

Initialisation. Pour $n = 0$: $3^0 - 1 = 0 = 8 \times 0$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ est vraie : $3^{2n} = 8k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$3^{2(n+1)} - 1 = 9 \times 3^{2n} - 1 = 9(8k + 1) - 1 = 72k + 8 = 8(9k + 1).$$

Comme $9k + 1 \in \mathbb{N}$, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 (Comparaison de 2^n et n^2)

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $n^2 - 2n - 1 \geq 0$.
2. En déduire par récurrence que pour tout entier $n \geq 4$:

$$2^n \geq n^2$$

Corrigé

1. Pour tout réel n , $n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$. Si $n \geq 3$, alors $n-1 \geq 2$, donc $(n-1)^2 \geq 4$ et

$$n^2 - 2n - 1 \geq 4 - 2 = 2 \geq 0.$$

2. Pour tout entier $n \geq 4$, on note $P(n)$: $\acute{n} 2^n \geq n^2 \acute{z}$.

Initialisation. Pour $n = 4$: $2^4 = 16 = 4^2$, donc $P(4)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 4$ fixé tel que $P(n)$ est vraie. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$.

Or :

$$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 \geq 0$$

d'après la question 1, puisque $n \geq 4 \geq 3$. Donc $2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$, et $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 4$.

Exercice 6 (Dérivées successives) Soit $f : x \mapsto xe^x$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: $\acute{n}$ f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x \acute{z}$.

Initialisation. Pour $n = 0$: $f^{(0)}(x) = f(x) = xe^x = (x+0)e^x$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ est vraie. La fonction $f^{(n)} : x \mapsto (x+n)e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n+1)}(x) = 1 \times e^x + (x+n)e^x = (x+n+1)e^x.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 (Une récurrence double) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = e$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$$

Montrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n = e^n$.

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: $\acute{n}$ u_n est bien défini et $u_n = e^n \acute{z}$.

Initialisation. On a $u_0 = 1 = e^0$ et $u_1 = e = e^1$, donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies : $u_n = e^n$ et

$u_{n+1} = e^{n+1}$. Comme $u_n = e^n \neq 0$, le quotient $\frac{u_{n+1}^2}{u_n}$ a un sens, donc u_{n+2} est bien

défini, et :

$$u_{n+2} = \frac{(e^{n+1})^2}{e^n} = \frac{e^{2n+2}}{e^n} = e^{n+2}.$$

Donc $P(n+2)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence double, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. VALEUR ABSOLUE

Rappel de cours – Valeur absolue

Pour tout réel x , la valeur absolue de x est le réel positif défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Pour tous réels x et y :

- $|x| = \max(x, -x)$, $|-x| = |x|$ et $\sqrt{x^2} = |x|$;
- $|xy| = |x||y|$;
- $|x - y|$ est la distance entre x et y sur la droite réelle ;
- inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Du nouveau ! – Résolution d'équations et d'inéquations

Soient X et Y deux réels et $a \geq 0$. Alors :

- $|X| = a \iff X = a \text{ ou } X = -a$;
- $|X| = |Y| \iff X = Y \text{ ou } X = -Y$;
- $|X| \leq a \iff -a \leq X \leq a$;
- $|X| \geq a \iff X \leq -a \text{ ou } X \geq a$.

Si $a < 0$, l'équation $|X| = a$ n'a pas de solution, puisqu'une valeur absolue est toujours positive.

En termes de distance, pour $c \in \mathbb{R}$ et $r \geq 0$: $|x - c| \leq r \iff x \in [c - r, c + r]$.

Exercice 8 (Une disjonction de cas) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$.

1. Écrire $f(x)$ sans valeur absolue sur chacun des intervalles $]-\infty, -2[$, $[-2, 1[$ et $[1, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 5$.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 5$.

Corrigé

1. On a $x - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$ et $x + 2 \geq 0 \iff x \geq -2$.
 - Si $x < -2$: $x - 1 < 0$ et $x + 2 < 0$, donc $f(x) = -(x - 1) - (x + 2) = -2x - 1$.
 - Si $-2 \leq x < 1$: $x - 1 < 0$ et $x + 2 \geq 0$, donc $f(x) = -(x - 1) + (x + 2) = 3$.
 - Si $x \geq 1$: $x - 1 \geq 0$ et $x + 2 > 0$, donc $f(x) = (x - 1) + (x + 2) = 2x + 1$.
2. On résout sur chaque intervalle.
 - Sur $]-\infty, -2[$: $-2x - 1 = 5 \iff x = -3$, et $-3 < -2$, donc -3 est solution.
 - Sur $[-2, 1[$: $f(x) = 3 \neq 5$, donc il n'y a pas de solution.
 - Sur $[1, +\infty[$: $2x + 1 = 5 \iff x = 2$, et $2 \geq 1$, donc 2 est solution.Finalement, $\mathcal{S} = \{-3; 2\}$.
3. On résout encore sur chaque intervalle.
 - Sur $]-\infty, -2[$: $-2x - 1 \leq 5 \iff x \geq -3$, d'où les solutions $[-3, -2[$.
 - Sur $[-2, 1[$: $3 \leq 5$ est toujours vrai, d'où les solutions $[-2, 1[$.
 - Sur $[1, +\infty[$: $2x + 1 \leq 5 \iff x \leq 2$, d'où les solutions $[1, 2]$.Finalement, $\mathcal{S} = [-3, 2]$.

Exercice 9 (Équations avec valeurs absolues) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $|2x - 3| = 5$;
- b) $|x + 4| = -2$;
- c) $|3x - 1| = |x + 5|$;
- d) $|x - 2| = 2x + 1$.

Corrigé

- a) $|2x - 3| = 5 \iff 2x - 3 = 5 \text{ ou } 2x - 3 = -5 \iff x = 4 \text{ ou } x = -1$. Donc $\mathcal{S} = \{-1; 4\}$.
- b) Une valeur absolue est positive, elle ne peut pas valoir -2 . Donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
- c) $|3x - 1| = |x + 5| \iff 3x - 1 = x + 5 \text{ ou } 3x - 1 = -(x + 5)$, c'est-à-dire $x = 3$ ou $x = -1$. Donc $\mathcal{S} = \{-1; 3\}$.

d) Le membre de gauche est positif, donc une solution doit vérifier $2x + 1 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -\frac{1}{2}$. Sous cette condition :

$$|x-2| = 2x+1 \iff x-2 = 2x+1 \text{ ou } x-2 = -(2x+1) \iff x = -3 \text{ ou } x = \frac{1}{3}.$$

Or $-3 < -\frac{1}{2}$, donc -3 est rejeté, alors que $\frac{1}{3} \geq -\frac{1}{2}$ convient. Vérification : $|\frac{1}{3} - 2| = \frac{5}{3}$ et $2 \times \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3}$. Donc $\mathcal{S} = \{\frac{1}{3}\}$.

Exercice 10 (Inéquations avec valeurs absolues) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, et donner les solutions sous forme d'intervalles :

- a) $|x - 3| \leq 2$;
- b) $|2x + 1| < 3$;
- c) $|x + 1| \geq 4$;
- d) $|1 - 3x| > 2$.

Corrigé

- a) $|x - 3| \leq 2 \iff -2 \leq x - 3 \leq 2 \iff 1 \leq x \leq 5$. Donc $\mathcal{S} = [1, 5]$: ce sont les réels à distance au plus 2 de 3.
- b) $|2x + 1| < 3 \iff -3 < 2x + 1 < 3 \iff -4 < 2x < 2 \iff -2 < x < 1$.
Donc $\mathcal{S} =]-2, 1[$.
- c) $|x + 1| \geq 4 \iff x + 1 \leq -4 \text{ ou } x + 1 \geq 4 \iff x \leq -5 \text{ ou } x \geq 3$. Donc $\mathcal{S} =]-\infty, -5] \cup [3, +\infty[$.
- d) $|1 - 3x| > 2 \iff 1 - 3x < -2 \text{ ou } 1 - 3x > 2 \iff x > 1 \text{ ou } x < -\frac{1}{3}$. Donc $\mathcal{S} =]-\infty, -\frac{1}{3}[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 11 (Simplifications) Écrire les expressions suivantes sans valeur absolue :

- a) $|\sqrt{2} - 2|$;
- b) $|\pi - 3| + |3 - \pi|$;
- c) $|\ln(\frac{1}{2})|$;
- d) $|1 - e|$;
- e) $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$;
- f) $|\ln x| + |x - 1|$, pour $x \in]0, 1[$.

Corrigé

- a) $\sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$, donc $\sqrt{2} - 2 < 0$ et $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$.
- b) $\pi > 3$, et $|3 - \pi| = |\pi - 3|$, donc $|\pi - 3| + |3 - \pi| = 2(\pi - 3) = 2\pi - 6$.
- c) $\ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$ et $\ln 2 > 0$, donc $|\ln(\frac{1}{2})| = \ln 2$.
- d) $e > 1$, donc $1 - e < 0$ et $|1 - e| = e - 1$.
- e) $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = |1 - \sqrt{3}|$. Or $\sqrt{3} > 1$, donc $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{3} - 1$.
- f) Si $x \in]0, 1[$, alors $\ln x < 0$ et $x - 1 < 0$, donc

$$|\ln x| + |x - 1| = -\ln x + 1 - x.$$