



Réduction des endomorphismes

1. VECTEURS PROPRES, VALEURS PROPRES

Définition 1 | Valeur propre, vecteur propre (d'un endomorphisme)

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit x un vecteur non nul, on dit que x est un **vecteur propre de u** s'il existe un réel $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u(x) = \lambda x$. λ est alors une **valeur propre de u** .

Remarque 1.1 — De façon équivalente, on dit que $\lambda \in \mathbf{R}$ est valeur propre de u s'il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$.

Exemple 1 —

- On définit un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ par, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, y)$. Déterminer ses valeurs propres.
- On définit un endomorphisme de $M_2(\mathbf{R})$ par, pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$, $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$. Montrer que 1 est valeur propre.

Définition 2 | Spectre d'un endomorphisme

Le spectre d'un endomorphisme, souvent noté $\text{Sp}(u)$, est l'ensemble des valeurs propres de u .

Exemple 2 —

- On définit un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ par, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, y)$. Son spectre est $\{1\}$.
- On définit un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ par, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, y)$. Son spectre est $\{1, 2\}$.
- On définit un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ par, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (y, -x)$. Son spectre est $\emptyset$.

Définition 3 | Espace propre

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u . L'espace propre de u associé à la valeur λ est $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$. C'est l'ensemble des vecteurs propres de u associé à la valeur propre λ , auquel on rajoute le vecteur nul.

Proposition 1

Un espace propre est un sous espace vectoriel de E .

Remarque 1.2 — $E_\lambda(f)$ n'est jamais vide car il contient toujours 0_E , qui n'est pas considéré comme vecteur propre. On a alors

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \iff \dim E_\lambda(f) \geq 1.$$

Exemple 3 — Déterminer les espaces propres des endomorphismes définis par :

1. pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, y)$.
2. pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, y)$.

Proposition 2

$\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E . Il est non trivial si et seulement si λ est une valeur propre de u .

Remarque 1.3 — 0 est valeur propre de u si et seulement si u n'est pas inversible. La dimension de l'espace propre est $\dim \text{Ker} u$, ou $\dim E - \text{rg } u$ d'après le théorème du rang.

Théorème 1

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u - \lambda \text{id}_E$ n'est pas bijectif,
2. $u - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injectif,
3. $\exists x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \lambda x$.

Proposition 3

Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes est une famille libre.

Proposition 4

Des espaces propres associés à des valeurs propres différentes sont en somme directe.

Proposition 5

Si $\dim E = n$, alors u a au plus n valeurs propres distinctes.

Définition 4 | Valeur propre, vecteur propre (d'une matrice)

Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$ un vecteur non nul, on dit que X est un **vecteur propre de M** s'il existe un réel $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $MX = \lambda X$. λ est alors une **valeur propre de M** . L'espace propre de M associé à la valeur λ est $E_\lambda(M) = \text{Ker}(M - \lambda I_n)$. Le **spectre de M** est l'ensemble de ses valeurs propres.

Proposition 6

Si $M \in M_n(\mathbf{R})$, alors M a au plus n valeurs propres distinctes.

Proposition 7 | Spectre d'une matrice triangulaire, diagonale

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire (et donc d'une matrice diagonale) sont ses coefficients diagonaux.

Théorème 2 | Bilan

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, M sa matrice dans une base donnée et $\lambda \in \mathbf{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u - \lambda \text{id}_E$ n'est pas bijectif,
2. $u - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injectif,
3. $\exists x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \lambda x$,
4. $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible,
5. $\exists X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\}, MX = \lambda X$.

Théorème 3 | Lien matrice - endomorphisme

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbf{N}^*$. Soit M la matrice de u dans une base donnée $\mathcal{B}$. Alors u et M ont les mêmes valeurs propres et des espaces propres de même dimension. Les vecteurs propres de M sont obtenus en regardant les matrices représentant les vecteurs propres de u dans la base $\mathcal{B}$.

Corollaire 1

Soient A et B deux matrices semblables :

1. elles ont les mêmes valeurs propres,
2. leurs espaces propres associés ont la même dimension,
3. A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable,
4. elles ont la même trace, le même rang.

2. DIAGONALISATION

Définition 5 | Endomorphisme diagonalisable

Un endomorphisme u est diagonalisable s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres.

Proposition 8

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable,
- 2.

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E),$$

- 3.

$$\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u),$$

Définition 6 | Matrice diagonalisable

Une matrice $M \in M_n(\mathbf{R})$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbf{R})$ et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}MP = D$.

Remarque 2.1 — Une matrice diagonale est diagonalisable!

Proposition 9

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. M est diagonalisable,
- 2.

$$M_{n,1}(\mathbf{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \text{Ker}(M - \lambda I_n),$$

- 3.

$$n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim \text{Ker}(M - \lambda I_n).$$

Remarque 2.2 — Retenez que si M est diagonalisable, $P^{-1}MP = D$ où D est une matrice diagonale contenant les valeurs propres, et P une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres correspondants (formant une base de $M_{n,1}(\mathbf{R})$).

Attention (*Ordre des vecteurs dans la matrice P .*)

Dans l'écriture $A = PDP^{-1}$, la j -ième colonne de la matrice de passage P doit être impérativement un vecteur propre associé à la valeur propre située sur le j -ième coefficient diagonal de D .

Proposition 10

Soit u un endomorphisme et M sa matrice dans une base donnée. u est diagonalisable si et seulement si M l'est.

Théorème 4 | **Cas particulier de n valeurs propres distinctes**

Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. Si M admet n valeurs propres distinctes, alors M est diagonalisable (et ses espaces propres sont de dimension 1).

Méthode (*Réduction des matrices 2×2*)

Pour étudier les valeurs propres d'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbf{R})$, on peut suivre le plan suivant :

1. On cherche les valeurs propres en regardant quand la matrice

$$M - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \text{ est non inversible.}$$

Pour cela, on peut utiliser le déterminant. Celui-ci donne un polynôme de degré 2 en λ .

2. Si le polynôme n'a pas de racine, alors la matrice ne peut pas être diagonalisable. Si celui-ci a deux racines, la matrice est diagonalisable (en vertu du théorème précédent). S'il a une seule racine, on regarde l'espace propre associé qui doit être de dimension 2.

Exemple 4 — Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables? Déterminer les espaces propres.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.3 — Une matrice admettant une unique valeur propre est diagonalisable si et seulement si elle est diagonale. Le sens réciproque est évident. Pour le sens direct, on suppose la matrice A diagonalisable, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ et P une matrice inversible

tels que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent λ (la valeur propre). En fait, $D = \lambda I_n$. Ainsi

$$P^{-1}AP = \lambda I_n \text{ donc } A = \lambda P I_n P^{-1} = \lambda I_n.$$

A est bien diagonale.

Exemple 5 — Montrer qu'un endomorphisme nilpotent est diagonalisable si et seulement s'il est nul. On commencera par prouver que 0 est son unique valeur propre.

Proposition 11

A et tA ont les mêmes valeurs propres. De plus, les espaces propres associés à une même valeur propre ont la même dimension.

Exemple 6 — Montrer que M est diagonalisable si et seulement si tM l'est.

3. RECHERCHE PRATIQUE DE VALEURS PROPRES

3.1. Pour des petites matrices

Pour une matrice 2×2 On peut utiliser le déterminant. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, λ est une valeur propre de M si et seulement si

$$M - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \text{ est non inversible,}$$

autrement dit si son déterminant $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc$ est nul. Ensuite, plusieurs cas se présentent (les mêmes que dans le cas général mais qu'on peut traiter parfois plus vite) :

- S'il y a deux valeurs propres distinctes, la matrice est diagonalisable.
- S'il n'y a pas de valeur propre, elle ne l'est pas.
- S'il y en a une seule, on peut calculer l'espace propre et se rendre compte que la matrice est diagonalisable uniquement si elle est déjà diagonale.

Exemple 7 — Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Pour une matrice 3×3 On peut faire usage du pivot de Gauss sur la matrice $M - \lambda I_3$ ce qui permettra d'avoir les valeurs propres sur la diagonale. Cependant, on peut souvent éviter ce calcul en combinant les cas particuliers ci-dessous.

Exemple 8 — Étude de matrices 3×3

1. **Recherche des valeurs propres par le pivot de Gauss :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

- *Réduction échelonnée :* On forme $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$. L'opération $L_3 \leftarrow (2-\lambda)L_3 - L_2$ (pour $\lambda \neq 2$) donne :

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}.$$

- *Valeurs propres :* La matrice n'est pas inversible si et seulement si un pivot s'annule, d'où $\text{Sp}(A) = \{1, 3\}$.
- *Espaces propres :*

– Pour $\lambda = 3 : A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, de dimension 1.

– Pour $\lambda = 1 : A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, de dimension 2.

- *Conclusion :* $\dim E_1(A) + \dim E_3(A) = 2 + 1 = 3$. La matrice A est donc **diagonalisable**.

2. **Cas d'une matrice triangulaire non diagonalisable :** Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

- *Recherche des valeurs propres :* B étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $\text{Sp}(B) = \{1, 2\}$.
- *Espaces propres :*

– Pour $\lambda = 2 : B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, de dimension 1.

– Pour $\lambda = 1 : B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_1(B) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, de dimension 1.

- **Conclusion** : $\dim E_1(B) + \dim E_2(B) = 1 + 1 = 2 \neq 3$. La matrice B n'est donc **pas diagonalisable**.

3.2. Utilisation des polynômes annulateurs

Attention

Les résultats de cette partie ne sont pas tels quels au programme, mais les exercices posés au concours guident souvent vers l'utilisation de cette méthode. Le résultat est donc à savoir démontrer.

Proposition 12

Soit u un endomorphisme et P un polynôme annulateur de u (c'est-à-dire que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$). Alors les valeurs propres de u sont nécessairement racines de P .

Remarque 3.1 — Ce résultat fonctionne aussi pour les matrices.

Exemple 9 — Soit $M = J_n \in M_n(\mathbf{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Montrer que $M^2 = nM$. En déduire les valeurs propres possibles de M . Montrer que M est diagonalisable.

Attention

Pas de réciproque! En effet, on peut toujours construire un polynôme annulateur de u avec plus de racines.

Recherche des dernières valeurs et vecteurs propres Quand on a trouvé par exemple $n - 1$ ou $n - 2$ valeurs propres pour une matrice (comptées avec multiplicité), la trace d'une matrice peut nous permettre de trouver les dernières.

Proposition 13 | Utilisation de la trace

Soit A une matrice diagonalisable dont le spectre est $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Alors :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \dim E_{\lambda_i}(A).$$

Exemple 10 — *Recherche des valeurs propres par le rang et la trace* Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$.

- *Recherche des valeurs propres* : C est de rang 2 (les colonnes C_1 et C_3 sont égales), donc 0 est valeur propre et $\dim E_0(C) = 3 - \text{rg}(C) = 1$. De plus, la deuxième ligne montre que

$$CX = 2X \text{ pour } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } 2 \text{ est une valeur propre. Enfin, par la trace : } \text{Tr}(C) = 4 =$$

$$0 + 2 + \lambda_3 \implies \lambda_3 = 2. \text{ Le spectre de } C \text{ est donc } \text{Sp}(C) = \{0, 2\}.$$

- *Espaces propres* :

$$\text{-- Pour } \lambda = 0 : E_0(C) = \text{Ker}(C) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \text{ de dimension } 1.$$

$$\text{-- Pour } \lambda = 2 : C - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies E_2(C) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \text{ de dimension } 2.$$

- *Conclusion* : $\dim E_0(C) + \dim E_2(C) = 1 + 2 = 3$. La matrice C est donc **diagonalisable**.

Autre cas intéressant : si on est en présence d'une matrice avec un "gros noyau" (disons de dimension $n-1$ ou $n-2$), on peut chercher les derniers vecteurs propres dans l'image de u .

Proposition 14

Soit x un vecteur propre de u associé à une valeur propre non nulle, alors $x \in \text{Im}(u)$.

4. APPLICATIONS CLASSIQUES

4.1. Calcul des puissances d'une matrice, d'un endomorphisme.

Proposition 15

- Soit u un endomorphisme diagonalisable et $\mathcal{B}$ une base dans laquelle la matrice de u est diagonale (notée D). Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice de u^k dans la base $\mathcal{B}$ est aussi diagonale, c'est D^k .
- Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$. Si $A = PDP^{-1}$ alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$. Ceci permet de calculer A^k si A est diagonalisable.

Exemple 11 — Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. En déduire une expression pour M^k pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Exemple 12 — Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n + v_n \\ v_{n+1} &= u_n + 4v_n \end{cases}.$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit $X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice M telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $X_{k+1} = MX_k$. En déduire une expression pour X_k puis pour u_k et v_k .

4.2. Retour sur les projecteurs et les symétries

Proposition 16 | Projecteurs

Un projecteur p est diagonalisable et son spectre est $\{0, 1\}$ (sauf dans le cas de l'identité auquel cas $\text{Sp}(p) = \{1\}$ et dans le cas nul auquel cas $\text{Sp}(p) = \{0\}$).

Exemple 13 — Montrer que le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

Proposition 17 | Symétries

Une symétrie s est diagonalisable et son spectre est $\{-1, 1\}$ (sauf dans le cas de l'identité auquel cas $\text{Sp}(s) = \{1\}$ et dans le cas de $-\text{id}$ auquel cas $\text{Sp}(s) = \{-1\}$).