

Soutien 3 – Dénombrement

1. LISTES, ARRANGEMENTS, PERMUTATIONS

Rappel de cours – Principes additif et multiplicatif

Soient E et F deux ensembles finis ; $\text{Card}(E)$ est le nombre d'éléments de E .

- **Principe additif** : si $E \cap F = \emptyset$, $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$. On additionne des cas disjoints.

Exemple : 12 romans et 8 BD, soit 20 livres au choix.

- **Principe multiplicatif** : $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$. On multiplie les nombres de choix d'étapes successives (branches d'un arbre).

Exemple : 3 entrées, 4 plats et 2 desserts donnent $3 \times 4 \times 2 = 24$ menus.

- **Complémentaire** : si $A \subset E$, $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$. Pour « au moins un », on compte « aucun » et on retranche.

Rappel de cours – Factorielle et permutations

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$, et $0! = 1$.

- **Propriété fondamentale** : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)! = (n+1) \times n!.$$

Elle sert à simplifier : $\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 42$.

- **Permutations** : il y a $n!$ façons d'ordonner n éléments (n choix pour la 1^{re} place, $n-1$ pour la 2^e, etc.).

Exemple : 4 personnes s'assoient sur un banc de $4! = 24$ façons.

Exercice 1 (Calculs avec des factorielles)

1. Calculer $\frac{10!}{8!}$ et $\frac{100!}{98!}$.

2. Simplifier, pour $n \geq 2$:

$$\frac{(n+1)!}{n!}, \quad \frac{n!}{(n-2)!}, \quad (n+1)! - n!.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}$.

Rappel de cours – k-uplets et parties

Soit E un ensemble à n éléments. Un **k-uplet** d'éléments de E est une liste $(x_1, \dots, x_k)$: l'**ordre compte**, $(1, 2) \neq (2, 1)$.

- **Avec répétitions** : n^k k -uplets (n choix par place).

Exemple : $26^3 = 17\,576$ « mots » de 3 lettres.

- **Éléments distincts** (arrangements), pour $k \leq n$:

$$n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Exemple : $10 \times 9 \times 8 = 720$ tiercés dans l'ordre avec 10 chevaux.

- **Parties** : E possède 2^n parties (chaque élément y est ou non).

Exercice 2 Un code secret est formé de 4 chiffres.

- Combien y a-t-il de codes ?
- Combien ont 4 chiffres distincts ?
- Combien ont au moins deux chiffres identiques ?

4. Combien commencent par un chiffre non nul et finissent par un chiffre pair ?

Exercice 3 Une anagramme de NOMBRE est un mot (sensé ou non) formé des mêmes lettres.

- Combien y en a-t-il ?
- Combien commencent et finissent par une consonne ?
- Combien ont les deux voyelles côte à côte ?

Exercice 4 Dix chevaux, dont Palomino, disputent une course. Un podium est le triplet (premier, deuxième, troisième).

- Combien y a-t-il de podiums ?
- Combien contiennent Palomino ?
- Combien ne le contiennent pas ? Vérifier la cohérence.

Exercice 5 Albane range sur une étagère ses 20 livres, dont les 7 tomes de *Harry Potter*. Réponses sous forme de factorielles. Combien de rangements :

- au total ?
- avec les 7 tomes côte à côte ?
- avec les 7 tomes côte à côte et dans l'ordre (tome 1 à 7) ?
- avec les 7 tomes dans l'ordre, mais pas forcément côte à côte ?

Exercice 6 On lance trois fois un dé à six faces et on note le triplet obtenu.

- Combien y a-t-il de résultats ?
- Combien ont trois nombres distincts ?
- Combien contiennent au moins un 6 ?

Exercice 7 (Nombre de parties d'un ensemble) Soit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$.

- À une partie A de E , on associe $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$, avec $x_i = 1$ si $e_i \in A$ et $x_i = 0$ sinon. En déduire que E a 2^n parties.
- Avec 8 ingrédients, combien de pizzas peut-on composer (pizza nue comprise) ? Avec au moins deux ingrédients ?

2. COMBINAISONS

Rappel de cours – Combinaisons

Soit E un ensemble à n éléments et $0 \leq k \leq n$. Une combinaison de k éléments de E est une **partie** à k éléments : **pas d'ordre**, pas de répétition. Leur nombre, « k parmi n », est

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pourquoi $k!$? Un k -uplet d'éléments distincts, c'est une partie à k éléments plus un ordre ($k!$ choix) : $\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \times k!$.

Exemple : $\{a, b, c, d\}$ a $\binom{4}{2} = 6$ parties à 2 éléments : ab, ac, ad, bc, bd, cd .
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$;
- symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (prendre k éléments, c'est en laisser $n-k$) ;
- relation de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ pour $0 \leq k \leq n-1$;
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Triangle de Pascal. Chaque coefficient est la somme de celui du dessus et de son voisin de gauche : $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$, soit $4 + 6 = 10$.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Rappel de cours – Choisir le bon modèle

Deux questions : l'ordre compte-t-il ? Y a-t-il des répétitions ? Pour tirer k objets parmi n :

- **successivement avec remise** (ordre, répétitions) : n^k ;
- **successivement sans remise** (ordre, pas de répétition) : $\frac{n!}{(n-k)!}$;
- **simultanément** (pas d'ordre, pas de répétition) : $\binom{n}{k}$.

Indices : « successivement », « code », « classement » : l'ordre compte ; « simultanément », « main », « comité » : il ne compte pas.

Exercice 8 (Calculs de coefficients binomiaux)

1. Calculer $\binom{7}{2}$, $\binom{8}{5}$, $\binom{10}{8}$ et $\binom{12}{6}$.
2. Montrer que pour $1 \leq k \leq n$: $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
3. Retrouver ce résultat en comptant de deux façons les comités de k personnes avec un président, parmi n personnes.

Exercice 9

1. n personnes se serrent toutes la main une fois. Combien de poignées de main ?
2. Combien de diagonales a un polygone convexe à n côtés ? Vérifier sur l'hexagone.
3. Quel polygone convexe a 35 diagonales ?

Exercice 10 Un jeu de 32 cartes compte 4 couleurs (cœur, carreau, trèfle, pique) de 8 cartes, dont un as par couleur. Une main est un ensemble de 5 cartes. Combien de mains :

1. au total ?
2. avec exactement deux as ?
3. avec au moins un as ?
4. avec exactement deux cœurs et trois piques ?

Exercice 11 Une classe de 18 filles et 12 garçons forme une délégation de 4 élèves.

1. Combien de délégations possibles ?
2. Combien avec 2 filles et 2 garçons ?
3. Combien avec au moins une fille ?
4. On désigne en plus un président et un secrétaire dans la délégation. Combien de possibilités ? Donner deux méthodes.

Exercice 12 (Tirages dans une urne) Une urne contient 4 boules rouges et 6 noires, numérotées. On tire 3 boules. Dans chaque cas, donner le nombre de tirages, puis celui des tirages avec exactement 2 rouges.

1. Tirage simultané.
2. Tirages successifs sans remise.
3. Tirages successifs avec remise.

Exercice 13 (Mots avec répétitions)

1. Combien de mots de 10 lettres contiennent exactement 4 A et 6 B ?
2. Combien le mot CHACAL a-t-il d'anagrammes ?

Exercice 14 (Deux formules démontrées par dénombrement) Soit E un ensemble à $n+1$ éléments et $a \in E$.

1. Soit $0 \leq k \leq n-1$. En séparant les parties de E à $k+1$ éléments selon qu'elles contiennent a ou non, démontrer la relation de Pascal.
2. En classant les parties d'un ensemble à n éléments selon leur cardinal, démontrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.