

DM 1 – Révisions : séries et intégrales

Exercice 1

- Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + n + 1}$ converge.
- Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge.
- Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.
- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$.
 - En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^n}$ converge.
 - On note $S_N = \sum_{n=0}^N \frac{n}{2^n}$. Exprimer $S_N - \frac{1}{2}S_N$ à l'aide d'une somme géométrique, puis calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.
- Justifier la convergence et calculer la somme de

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2^n + (-1)^n}{3^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{2^n + (-1)^n}{3^n n!}.$$

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^1 x e^x dx, \quad J = \int_1^e x \ln(x) dx, \quad K = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx, \quad L = \int_1^2 \frac{dx}{(3x-1)^2}.$$

Exercice 3 Pour tout réel x , on pose $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F' . En déduire les variations de F .
- À l'aide du changement de variable $u = -t$, montrer que F est impaire.
- Montrer que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq F(x) \leq x$.
- Montrer que pour tout $t \geq 1$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. En déduire que pour tout $x \geq 1$,

$$F(x) \leq F(1) + \frac{1}{e} \leq 1 + \frac{1}{e}.$$

- En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$, puis en $-\infty$.

Exercice 4 Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

- Soit $k \geq 1$. En utilisant la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[k, k+1]$, montrer que

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

- En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$. Que peut-on en déduire pour la série harmonique ?
- Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 0. En déduire qu'elle converge vers un réel $\gamma \in [0, 1]$.
- Montrer que $\ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$, puis, à l'aide de la question 2, que $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.
- Soit $k \geq 2$. Montrer que $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, puis que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.
- Soit $k \geq 2$.

a) Vérifier que $t \mapsto \ln(\ln(t))$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ sur $]1, +\infty[$.

b) Montrer que $\frac{1}{k \ln(k)} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln(t)}$.

c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge.

Exercice 5 (Vrai ou faux) Les questions 1 à 5 portent sur les équivalents, les questions 6 à 10 sur les petits o . Dans tout l'exercice, (u_n) , (v_n) , (w_n) , (t_n) sont des suites réelles ne s'annulant pas, et les relations $\sim$ et o sont prises lorsque $n \rightarrow +\infty$. Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, et justifier : une courte preuve si elle est vraie, un contre-exemple si elle est fausse.

1. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n - v_n \rightarrow 0$.
2. Si $u_n \rightarrow \ell$ avec $\ell \neq 0$, alors $u_n \sim \ell$.
3. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n + w_n \sim v_n + t_n$.
4. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^2 \sim v_n^2$.
5. Si $u_n \sim v_n$, alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.
6. $n^2 = o(e^n)$.
7. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
8. $u_n = o(1)$ si et seulement si $u_n \rightarrow 0$.
9. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
10. $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.