DM 1 – Révisions : séries et intégrales

Exercice 1

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n^2+n+1}$ converge.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.
4. a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$.
   b) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{n}{2^n}$ converge.
   c) On note $S_N = \sum_{n=0}^{N} \dfrac{n}{2^n}$. Exprimer $S_N - \frac{1}{2}S_N$ à l'aide d'une somme géométrique, puis calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n}$.
5. Justifier la convergence et calculer la somme de

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2^n+(-1)^n}{3^n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{2^n+(-1)^n}{3^n\, n!}.$$

Corrigé

1. Le terme général est positif. Pour $n \geq 1$, $n^2+n+1 \geq n^2 > 0$, donc

$$0 \leq \frac{1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $2>1$). Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+n+1}$ converge ; ajouter le terme $n=0$ ne change pas la nature.

2. Pour $n \geq 1$, $n(n+1) \leq (n+1)^2$, donc $\sqrt{n(n+1)} \leq n+1$ et

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{n+1} \geq 0.$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1} = \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k}$ est la série harmonique privée de son premier terme : elle diverge. Par comparaison, $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge.

3. Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Donc pour $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$$

La série converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

4. a) Notons $\mathcal{P}(n)$: « $n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ». $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies ($0 \leq 1$, $1 \leq 1{,}5$, $2 \leq 2{,}25$). Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Alors

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^{n+1} = \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}\right)^n \geq \tfrac{3}{2}\, n = n + \tfrac{n}{2} \geq n+1 \quad \text{car } n \geq 2.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, et par récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b) D'après a), pour tout n, $0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{(3/2)^n}{2^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. La série géométrique de raison $\frac{3}{4} \in]-1,1[$ converge, donc $\sum \frac{n}{2^n}$ converge par comparaison.

   c) On calcule, en décalant l'indice dans la seconde somme ($m = n+1$) :

$$\begin{aligned} S_N - \frac{1}{2}S_N &= \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{2^n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{2^n} - \sum_{m=1}^{N+1} \frac{m-1}{2^m} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{n-(n-1)}{2^n} - \frac{N}{2^{N+1}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} - \frac{N}{2^{N+1}}. \end{aligned}$$

Or $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^N} \to 1$, et $0 \le \frac{N}{2^{N+1}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^N \to 0$ d'après a). Donc $\frac{1}{2}S_N \to 1$, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

5. • $\frac{2^n+(-1)^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$: ce sont deux séries géométriques de raisons $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$, dans $]-1,1[$, donc convergentes. Par combinaison linéaire,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}.$$

• $\frac{2^n+(-1)^n}{3^n\,n!} = \frac{(2/3)^n}{n!} + \frac{(-1/3)^n}{n!}$: ce sont deux séries exponentielles, convergentes, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+(-1)^n}{3^n\,n!} = e^{2/3} + e^{-1/3}.$$

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^1 x\,e^x\,\mathrm{d}x, \qquad J = \int_1^e x\ln(x)\,\mathrm{d}x, \qquad K = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad L = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(3x-1)^2}.$$

Corrigé

• I : intégration par parties, en dérivant x et en intégrant e^x ($u = x$, $v' = e^x$, fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$) :

$$I = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

• J : intégration par parties, en dérivant ln et en intégrant x ($u = \ln x$, $v' = x$, $v = \frac{x^2}{2}$) :

$$J = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

• K : on reconnaît la forme $\frac{1}{2}\cdot\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1+x^2 > 0$:

$$K = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

• L : la fonction $x \mapsto -\frac{1}{3(3x-1)}$ a pour dérivée $\frac{1}{(3x-1)^2}$ sur $[1,2]$ (où $3x-1>0$). Donc

$$L = \left[-\frac{1}{3(3x-1)}\right]_1^2 = -\frac{1}{15} + \frac{1}{6} = \frac{1}{10}.$$

(On peut aussi poser le changement de variable affine $u = 3x-1$.)

Exercice 3 Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer F'. En déduire les variations de F.
2. À l'aide du changement de variable $u = -t$, montrer que F est impaire.
3. Montrer que pour tout $x \ge 0$, $0 \le F(x) \le x$.
4. Montrer que pour tout $t \ge 1$, $e^{-t^2} \le e^{-t}$. En déduire que pour tout $x \ge 1$,
$$F(x) \le F(1) + \frac{1}{e} \le 1 + \frac{1}{e}.$$
5. En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$, puis en $-\infty$.

Corrigé

1. La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le cours, $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en 0 : elle est dérivable et $F'(x) = e^{-x^2} > 0$. Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Avec $u = -t$ (changement de variable affine, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$) :
$$F(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-u^2}(-\mathrm{d}u) = -F(x).$$
Donc F est impaire.
3. Soit $x \ge 0$. Pour $t \in [0,x]$, $0 < e^{-t^2} \le 1$ car $-t^2 \le 0$. Par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre $0 \le x$) :
$$0 \le \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \le \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x.$$

4. Pour $t \geq 1$, $t^2 \geq t$, donc $-t^2 \leq -t$ et, par croissance de exp, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Pour $x \geq 1$, par la relation de Chasles puis par croissance de l'intégrale :

$$F(x) = F(1) + \int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq F(1) + \int_1^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = F(1) + e^{-1} - e^{-x} \leq F(1) + \frac{1}{e}.$$

Enfin $F(1) \leq 1$ d'après la question 3.

5. F est croissante (question 1) et majorée sur $[1, +\infty[$ par $1 + \frac{1}{e}$ (question 4). Par le théorème de la limite monotone, F admet une limite finie ℓ en $+\infty$, avec $F(1) \leq \ell \leq 1 + \frac{1}{e}$. Comme F est impaire, $F(x) = -F(-x) \to -\ell$ quand $x \to -\infty$.

Exercice 4 Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

1. Soit $k \geq 1$. En utilisant la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[k, k+1]$, montrer que

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$. Que peut-on en déduire pour la série harmonique ?
3. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 0. En déduire qu'elle converge vers un réel $\gamma \in [0, 1]$.
4. Montrer que $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, puis, à l'aide de la question 2, que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
5. Soit $k \geq 2$. Montrer que $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$, puis que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.
6. Soit $k \geq 2$.
   a) Vérifier que $t \mapsto \ln(\ln(t))$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ sur $]1, +\infty[$.
   b) Montrer que $\frac{1}{k\ln(k)} \geq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$.
   c) En déduire que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Corrigé

1. Pour $t \in [k, k+1]$, la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$ donne $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$. On intègre sur $[k, k+1]$, intervalle de longueur 1 (croissance de l'intégrale) :

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k} = \frac{1}{k}.$$

2. On somme l'inégalité de droite pour k de 1 à n et on utilise la relation de Chasles :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n+1).$$

On somme l'inégalité de gauche pour k de 1 à $n-1$ (si $n \geq 2$) :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} = H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n),$$

donc $H_n \leq 1 + \ln(n)$; c'est aussi vrai pour $n = 1$ ($H_1 = 1$).

Comme $\ln(n+1) \to +\infty$, on a $H_n \to +\infty$: la série harmonique diverge.

3. Pour $n \geq 1$, d'après la question 1 avec $k = n$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq 0.$$

D'après la question 2, $u_n = H_n - \ln(n) \geq \ln(n+1) - \ln(n) > 0$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\gamma \geq 0$. De plus $u_n \leq u_1 = 1$ pour tout n, donc $\gamma \leq 1$.

4. Pour $n \geq 2$, $\ln(n) > 0$ et $\ln(n+1) = \ln\big(n(1+\frac{1}{n})\big) = \ln(n) + \ln\big(1+\frac{1}{n}\big)$, donc

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\big(1+\frac{1}{n}\big)}{\ln(n)}.$$

Le numérateur $\ln\big(1+\frac{1}{n}\big)$ tend vers $\ln(1) = 0$ et le dénominateur $\ln(n)$ tend vers $+\infty$, donc le quotient tend vers 0. Ainsi $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \to 1$, c'est-à-dire $\ln(n+1) \sim \ln(n)$.

D'après la question 2, pour $n \geq 2$, en divisant par $\ln(n) > 0$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n)} + 1.$$

À gauche, le quotient tend vers 1 (on vient de le montrer) ; à droite, $\frac{1}{\ln(n)}+1 \to 1$. Par le théorème d'encadrement, $\frac{H_n}{\ln(n)} \to 1$, c'est-à-dire $H_n \sim \ln(n)$.

5. Pour $t \in [k-1,k]$ (avec $k \geq 2$, donc $t \geq 1 > 0$), $t \leq k$ donne $\frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{k^2}$. En intégrant sur $[k-1,k]$, de longueur 1 :

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

On somme pour k de 2 à n (Chasles) :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1 + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^n = 2 - \frac{1}{n}.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n^2}$ sont croissantes et majorées par 2 : la série converge, et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$.

6. a) Sur $]1,+\infty[$, $\ln(t) > 0$, donc $\ln(\ln(t))$ est défini, et par dérivation d'une composée : $\big(\ln(\ln(t))\big)' = \frac{\ln'(t)}{\ln(t)} = \frac{1}{t\ln(t)}$.

b) Sur $[k,k+1]$ (avec $k \geq 2$), les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont croissantes et strictement positives, donc leur produit aussi, et $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ est décroissante. Ainsi $\frac{1}{t\ln t} \leq \frac{1}{k\ln k}$, et en intégrant sur un intervalle de longueur 1 :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{k\ln(k)}.$$

c) On somme pour k de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Les sommes partielles tendent vers $+\infty$: la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

Exercice 5 **(Vrai ou faux)** Les questions 1 à 5 portent sur les équivalents, les questions 6 à 10 sur les petits o. Dans tout l'exercice, (u_n), (v_n), (w_n), (t_n) sont des suites réelles ne s'annulant pas, et les relations $\sim$ et o sont prises lorsque $n \to +\infty$. Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, et justifier : une courte preuve si elle est vraie, un contre-exemple si elle est fausse.

1. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n - v_n \to 0$.
2. Si $u_n \to \ell$ avec $\ell \neq 0$, alors $u_n \sim \ell$.
3. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n + w_n \sim v_n + t_n$.
4. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^2 \sim v_n^2$.
5. Si $u_n \sim v_n$, alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.
6. $n^2 = o(e^n)$.
7. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
8. $u_n = o(1)$ si et seulement si $u_n \to 0$.
9. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
10. $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Corrigé

1. **Faux.** $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^2$: $\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, donc $u_n \sim v_n$, mais $u_n - v_n = n \to +\infty$. Être équivalentes ne veut pas dire être proches en différence.
2. **Vrai.** $\frac{u_n}{\ell} \to \frac{\ell}{\ell} = 1$ (on peut diviser car $\ell \neq 0$). Attention : pour $\ell = 0$, écrire « $u_n \sim 0$ » n'a pas de sens.
3. **Faux.** $u_n = n+1$, $v_n = n$, $w_n = t_n = -n$: on a $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, mais $u_n + w_n = 1$ et $v_n + t_n = 0$. On n'additionne pas les équivalents.
4. **Vrai.** $\frac{u_n^2}{v_n^2} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^2 \to 1^2 = 1$. (On peut multiplier les équivalents, et donc les élever à une puissance fixée.)
5. **Faux.** $u_n = n+1$, $v_n = n$: $u_n \sim v_n$ mais $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{u_n - v_n} = e \not\to 1$. En fait $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ équivaut à $u_n - v_n \to 0$. On ne compose pas les équivalents par une fonction.
6. **Vrai.** $\frac{n^2}{e^n} \to 0$ par croissances comparées.
7. **Vrai.** $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} \to 0 \times 0 = 0$.
8. **Vrai.** $u_n = o(1)$ signifie $\frac{u_n}{1} = u_n \to 0$: c'est exactement la même chose.

9. **Vrai.** $\frac{u_n+v_n}{w_n} = \frac{u_n}{w_n} + \frac{v_n}{w_n} \to 0+0=0$. Autrement dit : $o(w_n)+o(w_n)=o(w_n)$.

10. **Faux.** $\dfrac{1/n}{1/n^2} = n \to +\infty$, et non 0. C'est l'inverse qui est vrai : $\dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, car $\dfrac{1/n^2}{1/n} = \dfrac{1}{n} \to 0$. Plus une suite tend vite vers 0, plus elle est « petite ».