Planche d'oral n° 1

Classe 913 – Khâgne B/L **Date** 9 novembre 2026
Préparation 1 heure

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$$

1. Calculer I_0.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de (I_n).
4. Calculer $I_n + I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$I_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^n I_n$$

   En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1}$ converge et donner sa somme.

6. a) À l'aide des questions 2 et 4, montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2n}$$

   b) En déduire un équivalent simple de I_n quand $n \to +\infty$.
   c) Quelle est la nature de la série $\sum I_n$?

Exercice 2

On note $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Exprimer A en fonction de I_3 et J, puis calculer J^2.
2. Montrer que $A^2 = A$. Que peut-on en déduire sur f ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et une base de $\operatorname{Im}(f)$. Vérifier que $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$.
4. On pose $S = 2A - I_3$.
   a) Calculer S^2. Quelle est la nature de l'endomorphisme s associé ?
   b) Déterminer ses éléments caractéristiques.
5. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(I_3 + A)^n = I_3 + (2^n - 1)A$$

Planche d'oral n° 2

Classe 913 – Khâgne B/L **Date** 9 novembre 2026
Préparation 1 heure

Exercice 1

On considère l'application φ définie par :

$$\begin{aligned}\varphi :&\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]\\ &P \longmapsto P(x+1) - P(x).\end{aligned}$$

1. (a) Montrer que φ est une application linéaire.
(b) Pour tout $P \in \mathbf{R}[x]$, étudier le degré de $\varphi(P)$ en fonction du degré de P.
(c) Déterminer le noyau de φ.
(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $\varphi_n : \mathbb{R}_{n+1}[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n+1}[x], \varphi_n(P) = \varphi(P).$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi_n$ est surjective.
(e) On note $E = \{P \in \mathbb{R}[x] : P(0) = 0\}$ et on considère l'application $\psi : E \to \mathbb{R}[x]$ définie par :

$$\forall P \in E, \psi(P) = \varphi(P).$$

Montrer que ψ est un isomorphisme.
2. (a) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
i. $P_0 = 1$;
ii. Pour tout $n \geq 1, \varphi(P_n) = P_{n-1}$ et $P_n(0) = 0$.
(b) Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que $(P_n)_{0\leq n\leq N}$ est une base de $R_N[x]$.
3. Soit $N \in \mathbb{N}$. On note pour un entier $n \in \mathbb{N}, \varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}$. On rappelle que $\varphi^0 = \mathrm{Id}$. Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_N[x]$, on a :

$$Q = \sum_{n=0}^{N} \left[\varphi^n(Q)\right](0) P_n.$$

4. (a) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
i. $B_0 = 1$;
ii. Pour tout $n \geq 1, B_n' = nB_{n-1}$ et $\int_0^1 B_n(t)\mathrm{d}t = 0$.
(b) Justifier que, pour tout $n \geq 2, B_n(0) = B_n(1)$.
(c) Montrer que, pour tout $n \geq 1, \varphi(B_n) = nx^{n-1}$.

Exercice 2

Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad u_n = H_n - \ln n, \qquad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$$

2. a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.
b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

c) En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite, notée γ, et que $0 \leq \gamma \leq 1$.

3. En déduire un équivalent simple de H_n quand $n \to +\infty$. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$?

4. On pose, pour tout $n \geq 1$, $w_n = u_n - u_{n+1}$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$: $0 \leq w_n \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

b) Montrer que la série $\sum w_n$ converge et calculer sa somme en fonction de γ.

c) En déduire que pour tout $n \geq 1$: $0 \leq u_n - \gamma \leq \dfrac{1}{n}$.