Chapitre 08 - Calcul matriciel

1 - Opérations sur les matrices

2 - Matrices carrées inversibles

Reprise du programme précédent

- Valeurs propres d'une matrice. Spectre d'une matrice.
- Valeurs propres d'une matrice triangulaire.
- Matrices semblables.
- Deux matrices semblables ont même trace, mêmes valeurs propres.
- Définition d'une matrice diagonalisable.

N'ont pas encore été vus : image, noyau, rang, vecteurs propres, sous-espaces propres, conditions de diagonalisabilité.

Chapitre 09 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1 - L'ensemble $\mathbb{R}^n$

- L'ensemble $\mathbb{R}^n$. Notation des vecteurs en ligne ou en colonne.
- Opérations : somme, multiplication par un scalaire.
- Notion de combinaison linéaire, notation Vect.
- Définition d'un sev de $\mathbb{R}^n$. Tout Vect est un sev.
- Tout ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0\}$ est un sev.
- Intersection de deux sous-espaces vectoriels.
- Les solutions d'un système linéaire homogène forment un sev.

2 - Sous-espaces vectoriels : bases et dimensions.

- Famille génératrice d'un sev. Propriétés.
- Familles libres / liées de vecteurs. Propriétés.
- Bases d'un espace vectoriel, dimension.
- Théorème de la base incomplète.
- Dimension d'un sous-espace vectoriel.
- Si $Card(\mathcal{F}) = \dim(E)$, alors $\mathcal{F}$ libre $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ génératrice.

N'ont pas encore été vus : somme de deux sous-espaces vectoriels, somme directe, formule de Grassmann, sev supplémentaires

---

Démonstrations exigibles :

- Si F et G sont deux sev de $\mathbb{R}^n$, alors $F \cap G$ aussi.

- Supposons $F = Vect(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k)$ et $u_k \in Vect(u_1, \dots, u_{k-1})$. Alors $F = Vect(u_1, \dots, u_{k-1})$.

- Supposons $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ libre, alors :

$$\text{si } x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^{k} \beta_j u_j, \quad \text{alors } \forall j \in [\![1, n]\!],\ \lambda_j = \beta_j$$

- Supposons $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ libre dans $\mathbb{R}^n$, et $x \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$(u_1, u_2, \dots, u_k, x) \text{ liée } \iff x \in Vect(u_1, u_2, \dots, u_k)$$

Savoirs faire exigibles :

— Déterminer si une matrice est inversible ou non.
— Calculer l'inverse d'une matrice 2x2
— Calculer l'inverse d'une matrice carrée par pivot
— Connaître la définition d'une valeur propre d'une matrice.

— Résoudre un système linéaire simple.
— Traduire qu'un vecteur est combinaison linéaire d'autres.
— Comprendre et utiliser la notation Vect.
— Mettre les solutions d'un syst.homogène en notation Vect.
— Vérifier si un ensemble quelconque est un sev de $\mathbb{R}^n$.
— Vérifier si une famille de vecteurs est libre/liée.
— Vérifier si une famille de vecteurs est génératrice d'un sev.
— Vérifier si une famille de vecteurs est une base d'un sev.
— Déterminer une base et la dimension d'un espace vectoriel.
— Écrire un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ sous équation cartésienne.
— Montrer que deux sev sont égaux.
— Déterminer l'intersection de deux sous-espaces vectoriels.