## Chapitre 10 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

**1 - L'ensemble $\mathbb{R}^n$**

**2 - Sous-espaces vectoriels : bases et dimensions.**

*Reprise du programme précédent*

**3 - Sommes de sev, sommes directes**

- Somme de deux sous-espaces vectoriels. Propriétés.
- Formule de Grassmann : dimension d'une somme.
- Sommes directes : définition et caractérisation.
- Sous-espaces supplémentaires.

## Chapitre 11 - Applications linéaires

**1 - Définitions**

- Définition d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$.
- Vocabulaire : endomorphismes, isomorphismes, automorphismes.
- Si $f$ est linéaire, alors $f(0) = 0$.
- L'image directe d'un sev par une appl.linéaire est un sev.
- L'image réciproque d'un sev par une appl.linéaire est un sev.

**2 - Image, noyau, rang.**

- Noyau de $f$. C'est un sous-espace vectoriel de l'ev de départ.
- Caractérisation : $f$ est injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
- Image de $f$. C'est un sous-espace vectoriel de l'ev d'arrivée.
- Caractérisation : $f$ est surjective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = F$.
- Rang de $f$.

*Le théorème du rang a été vu sur des exemples en exercices.*
*Pour cette semaine, à part dans les questions de cours, les exercices porteront sur des applications linéaires explicites.*
*Conformément au programme, on se focalisera en particulier sur des exemples dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$.*

---

***Démonstrations exigibles :***

- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
  Si $F$ est un sev de $\mathbb{R}^p$, alors $f(F)$ est encore un sev de $\mathbb{R}^n$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
  Si $G$ est un sev de $\mathbb{R}^n$, alors $f^{-1}(G)$ est encore un sev de $\mathbb{R}^p$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
  Alors $f$ est injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^p}\}$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
  Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$.
  Alors $\mathrm{Im}(f) = Vect(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p))$.

---

***Savoirs faire exigibles :***

— Déterminer une base et la dimension d'un espace vectoriel.
— Écrire un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ sous équation cartésienne.
— Montrer que deux sev sont égaux.
— Déterminer l'intersection de deux sous-espaces vectoriels.
— Déterminer la somme de deux sous-espaces vectoriels.
— Connaître et utiliser la formule de Grassmann.
— Traduire que deux sev sont en somme directe/supplémentaires.
— Décomposer un vecteur dans une somme directe.

— Traduire qu'une application est linéaire.
— Déterminer le noyau d'une application linéaire explicite.
— Déterminer l'image d'une application linéaire explicite.
— Déterminer le rang d'une application linéaire explicite.
— Connaître et utiliser le théorème du rang.
— Traduire injectivité/surjectivité sur image/noyau/rang.