Chapitre 12 - Séries

1 - Convergence des séries

Conformément au programme, on se concentre sur les séries à termes positifs ici, ou bien aux séries absolument convergentes. La notion peut être étendue aux séries à termes quelconques (convergence absolue), mais ce n'est pas exigible des étudiants.

- Somme partielle d'ordre n. Convergence/divergence d'une série.
- Exemples fondamentaux : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$
- La convergence ne dépend pas du premier terme.
- Condition nécessaire de convergence : le t.g. doit tendre vers 0.

2 - Séries à termes positifs

- Condition nécessaire et suffisante : (S_n) majorée.
- Critères de conv. (comparaison, négligeabilité, équivalence).
- Convergence absolue pour une série à termes non positifs.

3 - Séries usuelles de référence

- Séries géométriques, dérivée première et seconde.

$$\forall q \in]-1,1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q},\quad \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2},\quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

- Séries exponentielles

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

- Séries de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

Démonstrations exigibles :

1. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

   On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.
2. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.
3. La série exponentielle $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument.
4. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge lorsque $\alpha > 1$.

Savoirs faire exigibles :

— Calculer des sommes finies
— Reconnaître et calculer des sommes télescopiques
— Calculer des équivalents de suites.

— Différentier le vocabulaire du chap.12 (somme partielle, série,...).
— Montrer qu'une série converge via somme partielle.
— Montrer qu'une série converge via un critère de convergence.
— Déterminer si une série est absolument convergente.

— Calculer une somme infinie en reconnaissant des séries usuelles
— Connaître les formules des séries géométriques
— Connaître la formule de la série exponentielle
— Connaître les séries de Riemann