

Chapitre 14 - Diagonalisation

1 - Éléments propres

- Valeurs propres d'un endomorphisme/d'une matrice carrée
- Vecteurs propres, sous-espaces propres
- Valeurs propres d'une matrice carrée de taille 2
- Valeurs propres d'une matrice triangulaire
- Utilisation d'un polynôme annulateur pour trouver des valeurs propres possibles.
- Les espaces propres sont en somme directe.
- Une matrice de taille n a n valeurs propres maxi
- On a toujours $\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq n$.

2 - Diagonalisation

- Endomorphisme, matrice diagonalisable
- Condition nécessaire et suffisante :

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \text{ diagonalisable} \iff \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda(f)) = n$$

- Condition suffisante : si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a n valeurs propres distinctes, f est diagonalisable
- Cas particulier où f/A n'a qu'une seule valeur propre

3 - Matrices semblables

- Matrices semblables
- Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme
- Deux matrices semblables ont même inversibilité, même rang, même trace, mêmes valeurs propres, mêmes dimensions des espaces propres
- Si A est diagonalisable, alors la trace de A est égale à la somme des valeurs propres (avec multiplicité)

Démonstrations exigibles :

Pas de démonstration cette semaine.

Savoirs faire exigibles :

- Déterminer le rang d'une matrice
- Déterminer le noyau d'une matrice
- Connaître la définition d'une valeur propre
- Connaître la définition d'un vecteur propre
- Connaître la définition d'un endomorphisme diagonalisable
- Connaître la définition d'une matrice diagonalisable
- Vérifier qu'un réel est valeur propre d'une matrice
- Vérifier qu'un vecteur est vecteur propre.
- Chercher des valeurs propres évidentes d'une matrice
- Utiliser un polynôme annulateur pour obtenir les vp possibles
- Faire le lien entre l'inversibilité et 0 valeur propre (ou non)
- Regarder la somme des dimensions des sous-espaces propres pour conclure sur la diagonalisabilité d'une matrice
- Diagonaliser en pratique une matrice