Chapitre 03 - Fonctions d'une variable réelle

Révisions du programme précédent (fonctions usuelles)

Chapitre 04 - Limites et équivalents

1 - Opérations sur les limites

Révisions de terminale sur des exercices

2 - Fonctions négligeables, fonctions équivalentes

- Définition de $f(x) = o(g(x))$ (par limite du quotient).
- Propriétés. Croissances comparées.

$$\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0,\ \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad x^\alpha (\ln(x))^\beta \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

- Fonctions équivalentes $f(x) \sim g(x)$ (par limite du quotient)
- Propriétés.
- Équivalents usuels à connaître :

$$\ln(u) \underset{u \to 1}{\sim} u - 1, \qquad e^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x, \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$$

$$\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x, \quad \tan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x, \quad \mathrm{Arctan}(x) \underset{x \to 0}{\sim} x, \quad \cos(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$$

3 - Continuité en un point

- Continuité en un point. Continuité à droite/à gauche.
- Prolongement par continuité.

Démonstrations exigibles :

1. Rappeler graphiquement pourquoi on a : $\forall x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$. En déduire que :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$
2. En admettant que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, montrer que :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$$
3. En admettant que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, montrer que
$$\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0, \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$$
4. Pour $a \in \mathbb{R}$, déterminer la limite de $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$

Savoirs faire exigibles :

— Déterminer le domaine de définition d'une fonction
— Connaître les fonctions usuelles et leur graphe

— Calculer une limite par opération / composition
— Reconnaître les formes indéterminées.
— Connaître et utiliser les croissances comparées.
— Traduire ce que signifie $f(x) = o(g(x))$
— Traduire ce que signifie $f(x) \sim g(x)$
— Connaître et utiliser les équivalents usuels
— Montrer qu'une fonction est continue en un point.
— Montrer qu'une fonction est prolongeable par continuité en un point.

Le cours (théorique) sur les limites n'a pas été étudié à l'exception des fonctions négligeables ou équivalentes. On se contente d'exercices techniques cette semaine : calculs de limites avec ou sans équivalents.