

Chapitre 09 - L'espace vectoriel \mathbb{R}^n

1 - L'ensemble \mathbb{R}^n

- L'ensemble \mathbb{R}^n . Notation des vecteurs en ligne ou en colonne.
- Opérations : somme, multiplication par un scalaire.
- Notion de combinaison linéaire, notation Vect.
- Définition d'un sev de \mathbb{R}^n . Tout Vect est un sev.
- Tout ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^n a_k x_k = 0\}$ est un sev.
- Intersection de deux sous-espaces vectoriels.
- Les solutions d'un système linéaire homogène forment un sev.

2 - Sous-espaces vectoriels : bases et dimensions.

- Famille génératrice d'un sev. Propriétés.
- Familles libres / liées de vecteurs. Propriétés.
- Bases d'un espace vectoriel, dimension.
- Théorème de la base incomplète.
- Dimension d'un sous-espace vectoriel.
- Si $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$, alors \mathcal{F} libre $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ génératrice.

N'ont pas encore été vus : somme de deux sous-espaces vectoriels, somme directe, formule de Grassmann, sev supplémentaires

Démonstrations exigibles :

- Si F et G sont deux sev de \mathbb{R}^n , alors $F \cap G$ aussi.
- Supposons $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k)$ et $u_k \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})$. Alors $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})$.

- Supposons (u_1, u_2, \dots, u_k) libre, alors :

$$\text{si } x = \sum_{j=1}^k \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^k \beta_j u_j, \quad \text{alors } \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = \beta_j$$

- Supposons (u_1, u_2, \dots, u_k) libre dans \mathbb{R}^n , et $x \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$(u_1, u_2, \dots, u_k, x) \text{ liée} \iff x \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k)$$

Savoirs faire exigibles :

- Déterminer si une matrice est inversible ou non.
- Calculer l'inverse d'une matrice 2x2
- Calculer l'inverse d'une matrice carrée par pivot
- Connaître la définition d'une valeur propre d'une matrice.
- Résoudre un système linéaire simple.
- Traduire qu'un vecteur est combinaison linéaire d'autres.
- Comprendre et utiliser la notation Vect.
- Mettre les solutions d'un syst.homogène en notation Vect.
- Vérifier si un ensemble quelconque est un sev de \mathbb{R}^n .
- Vérifier si une famille de vecteurs est libre/liée.
- Vérifier si une famille de vecteurs est génératrice d'un sev.
- Vérifier si une famille de vecteurs est une base d'un sev.
- Déterminer une base et la dimension d'un espace vectoriel.
- Écrire un plan vectoriel de \mathbb{R}^3 sous équation cartésienne.
- Montrer que deux sev sont égaux.
- Déterminer l'intersection de deux sous-espaces vectoriels.