Chapitre 10 - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1 - L'ensemble $\mathbb{R}^n$

2 - Sous-espaces vectoriels : bases et dimensions.

Reprise du programme précédent

3 - Sommes de sev, sommes directes

- Somme de deux sous-espaces vectoriels. Propriétés.
- Formule de Grassmann : dimension d'une somme.
- Sommes directes : définition et caractérisation.
- Sous-espaces supplémentaires.

Chapitre 11 - Applications linéaires

1 - Définitions

- Définition d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$.
- Vocabulaire : endomorphismes, isomorphismes, automorphismes.
- Si f est linéaire, alors $f(0) = 0$.
- L'image directe d'un sev par une appl.linéaire est un sev.
- L'image réciproque d'un sev par une appl.linéaire est un sev.

2 - Image, noyau, rang.

- Noyau de f. C'est un sous-espace vectoriel de l'ev de départ.
- Caractérisation : f est injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
- Image de f. C'est un sous-espace vectoriel de l'ev d'arrivée.
- Caractérisation : f est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$.
- Rang de f.

Le théorème du rang a été vu sur des exemples en exercices.
Pour cette semaine, à part dans les questions de cours, les exercices porteront sur des applications linéaires explicites.
Conformément au programme, on se focalisera en particulier sur des exemples dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$.

Démonstrations exigibles :

- Si F et G sont deux sev de $\mathbb{R}^n$, sont équivalents :
  (i) la somme $F + G$ est directe
  (ii) si $x + y = 0$ avec $x \in F$ et $y \in G$, alors $x = y = 0$
  (iii) $F \cap G = \{0\}$.

- Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ linéaire.
  Alors f est injective $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^p}\}$.
- Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ linéaire.
  Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de $\mathbb{R}^p$.
  Alors $\mathrm{Im}(f) = Vect(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_p))$.

- Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ linéaire et injective.
  Soit $(u_1, \ldots, u_k)$ une famille libre de $\mathbb{R}^p$.
  Alors $(f(u_1), \ldots, f(u_k))$ est une base famille libre de $\mathbb{R}^n$.

Savoirs faire exigibles :

— Déterminer une base et la dimension d'un espace vectoriel.
— Écrire un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ sous équation cartésienne.
— Montrer que deux sev sont égaux.
— Déterminer l'intersection de deux sous-espaces vectoriels.
— Déterminer la somme de deux sous-espaces vectoriels.
— Connaître et utiliser la formule de Grassmann.
— Traduire que deux sev sont en somme directe/supplémentaires.
— Décomposer un vecteur dans une somme directe.

— Traduire qu'une application est linéaire.
— Déterminer le noyau d'une application linéaire explicite.
— Déterminer l'image d'une application linéaire explicite.
— Déterminer le rang d'une application linéaire explicite.
— Connaître et utiliser le théorème du rang.
— Traduire injectivité/surjectivité sur image/noyau/rang.