Chapitre 11 - Applications linéaires

1 - Définitions

2 - Image, noyau, rang.

Reprise du programme précédent

3 - Image des familles de vecteurs

- Si $f(\mathcal{B})$ est une famille libre, alors $\mathcal{B}$ est libre.
- Si $\mathcal{B}$ est libre et f injective, alors $f(\mathcal{B})$ est libre.
- f isomorphisme ssi f envoie une base de E vers une base de F.
- Conséquence : si f est bijective, on a $\dim(E) = \dim(F)$.
- Théorème du rang. Application : si $\dim(E) = \dim(F)$, f injective ssi f surjective

4 - Opérations sur les applications linéaires

- $\mathcal{L}(E, F)$ est stable par C.L. Applications nulle, identité.
- Une composée d'ap.linéaires est encore linéaire. Réciproque d'un isomorphisme.
- Puissances d'un endomorphisme, formule du binôme.

5 - Projecteurs et symétries

- Définition d'un projecteur.
- Si f projecteur, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - Id)$ et $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$
- Symétrie par rapport à un sev F parallèlement à G

6 - Représentation matricielle

- Matrice représentative d'un vecteur x de E dans une base de E
- Matrice représentative d'une application linéaire ou d'un endomorphisme.
- Image et noyau d'une matrice. Théorème du rang.

Les matrices de passage n'ont pas encore été vues.
Par conséquent, les formules de changement de base non plus.

Pas de démonstration cette semaine.

Savoirs faire exigibles :

— Traduire qu'une application est linéaire.
— Bien connaître la définition du noyau de f.
— Bien connaître la définition de l'image de f.
— Connaître et utiliser le théorème du rang.
— Traduire injectivité/surjectivité sur image/noyau/rang.
— Connaître la définition et les propriétés d'un projecteur.

— Savoir comment montrer une équivalence
— Savoir comment montrer une implication
— Savoir comment montrer une égalité d'ensembles
— Savoir comment montrer une inclusion d'ensembles
— Savoir comment montrer que deux applications sont égales

— Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée
— Écrire la matrice (colonne) d'un vecteur dans une base
— Écrire la matrice d'un endomorphisme dans une base
— Calculer $f(x)$ si on connaît la matrice de f et si x est un vecteur donné
— Déterminer l'image d'une matrice
— Déterminer le noyau d'une matrice
— Traduire une relation sur les colonnes d'une matrice en élément du noyau.
— Utiliser le théorème du rang pour une matrice
— Connaître le lien entre inversibilité de M et bijectivité de f.