

## Chapitre 11 - Convergence de suites

### 1 Suites convergentes, divergentes

- Définition de la convergence/divergence. Unicité de la limite.
- Suites extraites.
- Si une suite converge vers  $\ell$ , alors toutes les suites extraites convergent vers  $\ell$ .
- Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers  $\ell$ , alors  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  également.

### 2 Opérations sur les limites

- Opérations sur les limites.
- Extension des notations vues sur les fonctions :  $o$  et  $\sim$ .
- Croissances comparées usuelles : pour  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,

$$(\ln(n))^\alpha \ll n^\beta \ll e^{n^\gamma} \ll n!$$

- Limites et inégalités. Passages à la limite dans (in)égalités.

### 3 Le cas des suites monotones

- Suites croissantes, décroissantes.
- Théorème de la limite monotone.
- Suites adjacentes : définition et théorème.

*En exercices :*

- Exemples de suites récurrentes du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Aucune théorie générale n'est au programme pour ces suites.
- Exemples de suites implicites, définies par des équations du type  $f(u_n) = 0$  ou  $f_n(u_n) = 0$ . Aucune théorie générale n'est au programme pour ces suites.

### *Démonstrations exigibles :*

1. Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$  et vers  $\ell' \in \mathbb{R}$ , alors  $\ell = \ell'$  (unicité de la limite)
2. Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent toutes les deux vers un réel  $\ell$ , alors la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .
3. Pour tout  $\alpha > 0$ ,  $e^{\alpha n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!)$ .
4. Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes, alors  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes vers une même limite.

### *Savoirs faire exigibles :*

- Déterminer la limite d'une suite explicite (limites, équivalents)
- Écrire la convergence d'une suite vers un réel  $\ell$ .
- Connaître la définition de deux suites adjacentes.
- Utiliser  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  pour avoir la convergence.
- Étudier la monotonie d'une suite.
- Utiliser le théorème de la limite monotone.
- Faire un passage à la limite dans une égalité/inégalité.