

## Chapitre 12 - Séries

### 1 - Convergence des séries

Conformément au programme, on se concentre sur les séries à termes positifs ici, ou bien aux séries absolument convergentes. La notion peut être étendue aux séries à termes quelconques, mais ce n'est pas exigible des étudiants.

- Somme partielle d'ordre  $n$ . Convergence/divergence d'une série.
- Exemples fondamentaux :  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$
- La convergence ne dépend pas du premier terme.
- Condition nécessaire de convergence : le t.g. doit tendre vers 0.

### 2 - Séries à termes positifs

- Condition nécessaire et suffisante :  $(S_n)$  majorée.
- Critères de conv. (comparaison, négligeabilité, équivalence).
- Convergence absolue pour une série à termes non positifs.

### 3 - Séries usuelles de référence

- Séries géométriques, dérivée première et seconde.

$$\forall q \in ]-1, 1[, \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

- Séries exponentielles

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

- Séries de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

### Démonstrations exigibles :

1. La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$  converge et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .  
On en déduit que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge.
2. La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge.
3. La série exponentielle  $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$  converge absolument.
4. La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge lorsque  $\alpha > 1$ .

### Savoirs faire exigibles :

- Calculer des sommes finies
- Reconnaître et calculer des sommes télescopiques
- Calculer des équivalents de suites.
- Différencier le vocabulaire du chap.12 (somme partielle, série, ...).
- Montrer qu'une série converge via somme partielle.
- Montrer qu'une série converge via un critère de convergence.
- Déterminer si une série est absolument convergente.
- Calculer une somme infinie en reconnaissant des séries usuelles
- Connaître les formules des séries géométriques
- Connaître la formule de la série exponentielle
- Connaître les séries de Riemann