

CORRECTION DS1

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 ; u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$

On définit également la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmético-géométrique.
2. Déterminer alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n .
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$.
4. Déduire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de n .

1. Pour tout entier n , on a :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n + 2 - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) + 2 = \frac{1}{2}v_n + 2$$

La suite (v_n) est donc bien arithmético-géométrique.

2. On résout l'équation caractéristique associée :

$$x = \frac{1}{2}x + 2 \iff \frac{1}{2}x = 2 \iff x = 4$$

La suite $(v_n - 4)_{n \geq 0}$ est alors géométrique, de raison $\frac{1}{2}$.

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - 4)$$

Or, $v_0 - 4 = (u_1 - u_0) = 1 - 4 = -3$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^n (-3) = 4 - 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En reconnaissant une somme télescopique, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n$$

4. Mais par ailleurs,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(4 - 3 \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = 4n - 3 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 4n - 6 + 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On en déduit donc avec la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4n - 6 + 6 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice 2

Pour tout réel x et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

$$D_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x^{i-j} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} kx^k.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $D_n(1)$ et $S_n(1)$.
2. On fixe x un réel diff rent de 1.

(a) Pour tout entier $i \geq 1$, rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{i-1} x^k$.

(b) En déduire pour tout entier $i \geq 1$, la valeur de $\sum_{j=1}^i x^{i-j}$.

(c) Montrer alors que, pour tout entier $n \geq 1$: $D_n(x) = \frac{n - (n+1)x + x^{n+1}}{(1-x)^2}$.

3. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel x , on a :

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)x^k$$

(b) En déduire, pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$S_n(x) = \frac{x(1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n)}{(1-x)^2}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$D_n(1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i 1 = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

et

$$S_n(1) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$$

2. Soit x un réel diff rent de 1.

(a) Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{i-1} x^k = \frac{1-x^i}{1-x}$$

(b) Soit $i \geq 1$. Remarquons qu'avec le changement de variable $k = i - j$, on a :

$$\sum_{j=1}^i x^{i-j} = \sum_{k=0}^{i-1} x^k = \frac{1-x^i}{1-x}$$

(c) Pour $n \geq 1$, on a alors :

$$\begin{aligned}
 D_n(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x^{i-j} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1-x^i}{1-x} \\
 &= \frac{n}{1-x} - \frac{1}{1-x} \sum_{i=1}^n x^i \\
 &= \frac{n}{1-x} - \frac{1}{1-x} \cdot x \frac{1-x^n}{1-x} \\
 &= \frac{n(1-x) - x(1-x^n)}{(1-x)^2} \\
 &= \frac{n - (n+1)x + x^{n+1}}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

3. (a) Mais par ailleurs, remarquons que :

$$D_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x^{i-j} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} x^k = \sum_{0 \leq k < i \leq n} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (n - (k+1) + 1) x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) x^k$$

(b) On en déduit donc que pour $n \geq 1$, et x réel, on a :

$$D_n(x) = n \sum_{k=0}^{n-1} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} k x^k = n \sum_{k=0}^{n-1} x^k - S_n(x)$$

Pour $x \neq 1$ et $n \geq 1$, on a donc :

$$\begin{aligned}
 S_n(x) &= n \sum_{k=0}^{n-1} x^k - D_n(x) \\
 &= n \frac{1-x^n}{1-x} - \frac{n - (n+1)x + x^{n+1}}{(1-x)^2} \\
 &= \frac{n(1-x)(1-x^n) - (n - nx - x + x^{n+1})}{(1-x)^2} \\
 &= \frac{n(1-x-x^n+x^{n+1}) - (n - nx - x + x^{n+1})}{(1-x)^2} \\
 &= \frac{x - nx^n + nx^{n+1} - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\
 &= \frac{x(1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n)}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

Exercice 3

Pour tout entier naturel n , on note c_n le réel, appelé le **nombre de Catalan d'ordre n** , défini par

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

1. Calculer les réels c_0 , c_1 et c_2 .

2. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

(b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, c_n est un entier naturel non nul.

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n.$$

4. On note, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k}$$

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \frac{n}{2} S_n$$

Indication : on pourra effectuer le changement d'indice $i = n - k$ dans la somme définissant T_n .

(b) Montrer à l'aide de la question 3 que

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n$$

(c) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = c_{n+1}$$

On a donc montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$$

1. • On a $c_0 = \frac{1}{1} \binom{0}{0} = \boxed{1}$.
- On a $c_1 = \frac{1}{2} \binom{2}{1} = \frac{1}{2} \cdot 2 = \boxed{1}$
- On a $c_2 = \frac{1}{3} \binom{4}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = \boxed{2}$

2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = c_n \end{aligned}$$

(b) Comme on sait que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$, $\binom{p}{k}$ est un entier naturel, par différence, on voit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \text{ est un entier}$$

De plus, avec la forme initiale : $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, on sait que par produit, $c_n > 0$, donc c_n est bien un entier naturel non nul.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+2} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(n+2)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1) \cdot (2n)!}{(n+2)(n+1)(n+1) \cdot n!n!} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad \text{car remarquons que } 2n+2 = 2(n+1) \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n \end{aligned}$$

4. (a) Suivons l'indication. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k} = \sum_{i=0}^n (n-i) c_{n-i} c_i = n \sum_{i=0}^n c_i c_{n-i} - \sum_{i=0}^n i c_i c_{n-i} = n S_n - T_n$$

On a donc

$$2T_n = n S_n, \quad \text{autrement dit,} \quad T_n = \frac{n}{2} S_n$$

(b) D'après la question 3, on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k+2)c_{k+1} = (4k+2)c_k$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\begin{aligned} 4T_n + 2S_n &= \sum_{k=0}^n 4k c_k c_{n-k} + \sum_{k=0}^n 2c_k c_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n (4k+2) c_k c_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n (k+2) c_{k+1} c_{n-k} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (i+1) c_i c_{n+1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} (i+1) c_i c_{n+1-i} - c_0 c_{n+1} \\ &= T_{n+1} + S_{n+1} - c_{n+1} \end{aligned}$$

On a donc bien

$$T_{n+1} + S_{n+1} = 4T_n + 2S_n + c_{n+1}$$

(c) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition, $\mathcal{P}(n) : \ll S_n = c_{n+1} \gg$.

- $S_0 = \sum_{k=0}^0 c_k c_{0-k} = c_0 c_0 = 1 = c_1 : \mathcal{P}(1)$ est bien vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée, i.e. $S_n = c_{n+1}$.
Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $S_{n+1} = c_{n+2}$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= c_{n+1} + 4T_n + 2S_n - T_{n+1} \quad (\text{d'après 4b}) \\ &= c_{n+1} + (2n+2)S_n - \frac{n+1}{2}S_{n+1} \quad (\text{d'après 4a}) \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\frac{n+1}{2} + 1 \right) S_{n+1} = c_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

autrement dit :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{2}{n+3}c_{n+1} + \frac{4(n+1)}{n+3}S_n \\ &= c_{n+1} \frac{4n+6}{n+3} \quad (\text{par l'hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{n+3}{2(2(n+1)+1)}c_{n+2} \frac{4n+6}{n+3} \quad (\text{d'après 3}) \\ &= c_{n+2} \end{aligned}$$

Par récurrence, on a donc bien montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = c_{n+1}$$