

Les trois exercices qui suivent sont indépendants les uns des autres.

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats des questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les encadrant, en les soulignant ou en les surlignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 ; u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$$

On définit également la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmético-géométrique.
2. Déterminer alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n .
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$.
4. Déduire des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 2

Pour tout réel x et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

$$D_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x^{i-j} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} kx^k.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $D_n(1)$ et $S_n(1)$.
2. On fixe x un réel diff rent de 1.
 - (a) Pour tout entier $i \geq 1$, rappeler la valeur de $\sum_{k=0}^{i-1} x^k$.
 - (b) En déduire pour tout entier $i \geq 1$, la valeur de $\sum_{j=1}^i x^{i-j}$.
 - (c) Montrer alors que, pour tout entier $n \geq 1$: $D_n(x) = \frac{n - (n+1)x + x^{n+1}}{(1-x)^2}$.
3. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel x , on a :

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)x^k$$

- (b) En déduire, pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$S_n(x) = \frac{x(1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n)}{(1-x)^2}$$

Exercice 3

Pour tout entier naturel n , on note c_n le réel, appelé le **nombre de Catalan d'ordre n** , défini par

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

1. Calculer les réels c_0 , c_1 et c_2 .

2. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

(b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, c_n est un entier naturel non nul.

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} c_n.$$

4. On note, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n k c_k c_{n-k}$$

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \frac{n}{2} S_n$$

Indication : on pourra effectuer le changement d'indice $i = n - k$ dans la somme définissant T_n .

(b) Montrer à l'aide de la question 3 que

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} + S_{n+1} = c_{n+1} + 4T_n + 2S_n$$

(c) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = c_{n+1}$$

On a donc montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}$$