

CONCOURS BLANC

MATHÉMATIQUES

Mai 2025

Instructions à lire attentivement : Ce sujet est composé de trois exercices à traiter dans l'ordre qui vous conviendra. Chaque exercice est à composer sur une copie différente avec son nom et prénom. La clarté et les justifications seront prises en compte dans la note. Les résultats, dans la mesure du possible, doivent être encadrés. La calculatrice est interdite.

EXERCICE 1 : ALGÈBRE

À traiter sur une copie à part

On considère $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A - Puissance de la matrice A

1. Déterminer le noyau et le rang de A .
2. Soit $u = (1, 1, 0)$. Montrer que $\text{Ker}(f - id) = \text{Vect}(u)$.
3. Déterminer $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Ker}(f - 2id) = \text{Vect}(v)$.
4. Soit $w = (1, 1, 1)$. Démontrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et démontrer que

$$T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Rappeler la relation entre A et T à l'aide d'une matrice inversible P . On calculera P^{-1} .
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe α_n tel que

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

On donnera α_1 ainsi qu'une relation entre α_{n+1} et α_n .

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = n2^{n-1}$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B - Matrices commutant avec A

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3. On considère le sous-ensemble $C(A)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices M telles que :

$$AM = MA.$$

8. Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
9. On admet que $M \in C(A)$ si, et seulement si, M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} -a + 2b & 2a - 2b & -a + b + 2c \\ -a + b & 2a - b & -a + b + c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base et la dimension de $C(A)$.

EXERCICE 2 : PROBABILITÉ

À traiter sur une copie à part

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernable au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirage ($n \geq 2$).

A - Étude du cas $c = 0$

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{\text{ième}} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X . Donner la valeur de $E(X)$ et $V(X)$.
2. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer la probabilité $\mathbb{P}(Y = k)$ puis déterminer $\mathbb{P}(Y = 0)$.
3. Vérifier que $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(Y = k) = 1$.
4. Pour $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

5. En déduire $E(Y)$.

B - Étude du cas $c \neq 0$

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leq p \leq n$, la variable aléatoire Z_p par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^p X_i.$$

6. Que représente la variable Z_p ?
7. Donner la loi de X_1 et l'espérance de X_1 .
8. Déterminer $\mathbb{P}_{(X_1=k)}(X_2 = i)$ pour tout $i, k \in \{0, 1\}$. En déduire la loi de X_2 et l'espérance de $E(X_2)$.
9. Déterminer la loi de Z_2 .
10. Déterminer le support de Z_p .
11. Soit $p \leq n - 1$.
 - (a) Déterminer $\mathbb{P}_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
 - (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que

$$\mathbb{P}(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}.$$

- (c) En déduire que X_p suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On raisonnera par récurrence sur p : les variables $X_1, X_2, \dots, X_p$ étant supposées suivre une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et on calculera $E(Z_p)$.

EXERCICE 3 : ANALYSE

À traiter sur une copie à part

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de $\zeta = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t) dt.$$

On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\cos^m(t) = (\cos(t))^m$.

1. Rappeler la nature de la série $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2}$.

2. (a) Calculer W_0 .

(b) i. Rappeler les formules d'Euler et en déduire que $\cos^2(t) = \frac{\cos(2t) + 1}{2}$.

ii. En déduire W_1 .

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $W_n > 0$.

(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin(t) \cos^{2n}(t) dt.$$

(e) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$W_n - W_{n+1} = \frac{1}{2n+1} W_{n+1}.$$

(f) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} W_n.$$

3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n - J_{n+1} = \int_0^{\pi/2} t^2 \sin^2(t) \cos^{2n}(t) dt.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n - J_{n+1} = \frac{1}{2n+1} J_{n+1} + \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos^{2n+1}(t) dt.$$

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) J_{n+1} - J_n = \frac{-2}{(2n+1)(2n+2)} W_{n+1}.$$

(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = \frac{-2}{(2n+2)^2}.$$

(e) Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0} = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}.$$

4. (a) Montrer que :

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t.$$

- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < J_n \leq \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1})$$

puis que

$$0 < J_n \leq \frac{\pi^2 W_n}{8(n+1)}.$$

5. Déterminer la valeur de $\zeta = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$.