Dossier d'Été Rentrée 2025 BL2

Chers futurs étudiants de BL2,

Comme vous le savez, l'été est déterminant dans TOUTES les matières pour votre concours dans quelques mois. Vous avez déjà eu l'expérience, pour certains, de votre inefficacité aux retours de "petites" vacances alors servez-vous de votre expérience pour ne pas refaire encore et toujours les mêmes erreurs... Tout et trop travailler en début d'été ou en fin d'été lorsque l'on se rend compte qu'il ne reste qu'une semaine n'est absolument pas efficace dans le temps ! Forcez-vous à trouver des moments réguliers pour travailler.

Concernant les maths, vous pouvez/devez de votre côté reprendre les bases des notions non maîtrisées durant l'année de BL1 en priorité avant d'aborder ce genre d'exercices. Je préfère que vous n'ayez pas toucher aux travaux d'été mais que toutes les bases soit acquises ! ! (Ce qui se vérifiera dès la semaine de rentrée avec le SIGMA) Pour les autres, pensez bien à refaire tous les DS de l'année en plus des travaux d'été qui sont un complément de votre année de BL1. Je vous conseille en plus de vos révisions personnelles de faire 2-3 exercices par semaine de ce livret.

Je reste à votre disposition tout l'été si vous avez des questions.

Madame Lossouarn

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{2\pi} x^n \sin(x)dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{2\pi} x^n \cos(x)dx.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir, à l'aide d'intégrations par parties, les relations

$$I_{n+1} = (n+1)J_n - (2\pi)^{n+1} \quad \text{et} \quad J_{n+1} = -(n+1)I_n.$$

2. Pour $n \in \{0, 1, 2\}$, calculer I_n et J_n.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = x^3 + 5x - 1.$$

1. (a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   (c) Établir que $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.
   (d) Donner l'équation de la tangente de la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_1 = \frac{3}{8} \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 5}.$$

   Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = 2x^3 - 3\alpha x^2 + 1 - 5\alpha$ où α est le nombre défini à la question $1(b)$.
   (a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   (b) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - \alpha$ à l'aide de g et x_n.
   (c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > \alpha$.
   (d) Montrer que la suite (x_n) est strictement décroissante en exprimant $x_{n+1} - x_n$ en fonction de $f(x_n)$. En déduire qu'elle est convergente. Quelle est sa limite ?

Exercice 3. Dans un laboratoire, des chercheurs font des expériences sur le comportement d'une souris. Ils disposent de trois tunnels A, B et C. Les deux premiers sont sans issue et le troisième permet à la souris de sortir. On constate que :

- La première fois, la souris choisit au hasard l'un des trois tunnels.
- Lorsque la souris se trompe (donc choisit un tunnel sans issue), la fois d'après, elle choisit au hasard l'un des deux autres tunnels.
- Lorsqu'elle réussi à sortir, la fois d'après, elle reprend le même tunnel.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement « Lors de la $n^{\text{ième}}$ expérience, la souris choisit le tunnel A (respectivement B et C) ». On note a_n, b_n et c_n leurs probabilités.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1 puis, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$a_{n+1} = \frac{b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n}{2} \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} + c_n.$$

2. Pour $n \geq 1$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. On pose que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que, $X_{n+1} = MX_n$.
   Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M dans la base canonique $\mathscr{B}$.
3. Déterminer une base et la dimension pour chacun des sous-espaces vectoriel $\mathrm{Ker}(f - id)$, $\mathrm{Ker}(f - \dfrac{1}{2}id)$ et $\mathrm{Ker}(f + \dfrac{1}{2}id)$.

4. Déterminer 3 vecteurs v_1, v_2, v_3 de coordonnées entières, dont le premier coefficient non nul est positif, tels que le pgcd des coefficients est 1 et tels que (v_1) base de $\mathrm{Ker}(f - id)$, (v_2) base de $\mathrm{Ker}(f - \frac{1}{2}id)$ et (v_3) base de $\mathrm{Ker}(f + \frac{1}{2}id)$.
5. Montrer que $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Montrer enfin que
$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
6. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathscr{B}'$.
7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer D^n puis en déduire M^n.
8. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$a_n = \frac{1}{3 \times 2^{n-1}}, \quad b_n = \frac{1}{3 \times 2^{n-1}} \quad \text{et} \quad c_n = 1 - \frac{1}{3 \times 2^{n-2}}.$$
9. Quelles sont les limites de a_n, b_n et c_n quand n tend vers $+\infty$? Que cela implique-t-il pour la souris ?

Exercice 4. Soit $n \geq 1$, un entier. On considère $n+1$ boîtes numérotées de 0 à n. Pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, la boîte numérotée k contient k boules rouges et $n-k$ boules bleues. On choisit une boîte uniformément au hasard. Ensuite, on tire uniformément au hasard une boule dans cette boîte. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note B_k l'événement « La boîte numéro k a été tirée », ainsi que R l'événement « une boule rouge a été tirée ».

1. Donner $\mathbb{P}(B_k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
2. Montrer que $P(R) = \frac{1}{2}$.
3. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Les événements R et B_k sont-ils indépendants ?
4. Déterminer la probabilité qu'on ait sélectionné la boîte numéro n sachant qu'on a tiré une boule rouge.
5. On note X le nombre de boules rouges que contient la boîte qu'on a tiré au hasard. Déterminer $E(X)$.

Exercice 5. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :
$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx.$$

1. Calculer W_0, W_1 et W_2.
2. Montrer que la suite (W_n) est décroissante et en déduire qu'elle converge.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \neq 0$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)W_n.$$
5. Montrer que la suite $((n+1)W_{n+1}Wn)$ est constante et calculer la valeur de cette constante.
6. En utilisant la monotonie de la suite (W_n), prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$
En déduire que $W_n \underset{n}{\sim} W_{n+1}$.
7. Déduire des questions précédentes que $W_n \underset{n}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n$.

Exercice 6. On considère les fonctions ch et sh définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\text{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Étudier la parité des fonctions ch et sh.
2. Montrer que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\text{sh}(x) \underset{0}{\sim} xe^{-x}$. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ en fonction de sh et ch.
5. On pose $h(x) = \text{sh}(x) - x\,\text{ch}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier les variations de h puis en déduire le signe de h sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. Déterminer les variations complète de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_n(x) = (1 - x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx.$$

L'objectif est de déterminer les trois réels a, b, c tels que

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \text{o}(\frac{1}{n^2}).$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite (I_n).
3. Déterminer le signe de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on en déduire ?
4. Majorer la fonction $x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0, 1]$. En déduire, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
5. En déduire la limite de I_n. En déduire la valeur de a.
6. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$2I_{n+1} = 1 - (n + 1)I_n.$$
7. En déduire la limite de nI_n puis la valeur de b.
8. Déterminer également la limite de $n(nI_n - 1)$ et en déduire la valeur de c.

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x\ln(x) - 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

On définit également g sur $\mathbb{R}^2$ respectivement par

$$g(x, y) = xe^y - ye^x.$$

Partie A :

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.
3. En dérivant deux fois la fonction f, déterminer les variations de f.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J que l'on précisera.
5. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
6. (a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$f(x_k) = k.$$

   (b) Donner la valeur de x_0.

   (c) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite.

Partie B :

7. Calculer les dérivées partielles de la fonction g.
8. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un point critique de g.

   (a) Montrer que :

$$\begin{cases} ab = 1 \\ a = e^{a-1/a} \end{cases}$$

   (b) En déduire que nécessairement :

$$\begin{cases} a > 0 \\ ab = 1 \\ f(a) = 0 \end{cases}$$

   (c) Conclure que $(1, 1)$ est le seul point critique de g.
9. La fonction g admet-elle un extremum local sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 9. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_{n-1} + I_n$.
3. À l'aide d'une somme télescopique, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2).$$

Exercice 10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}.$$

Déterminer la probabilité que A soit inversible.