Soutien 1 : Dérivation

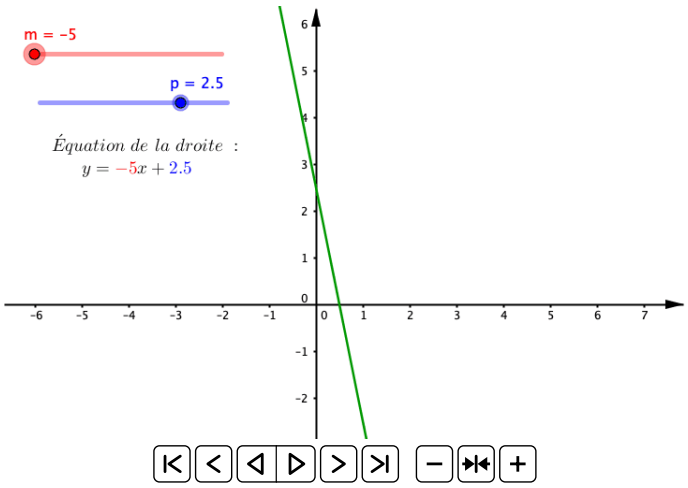
I) Équation de Droite

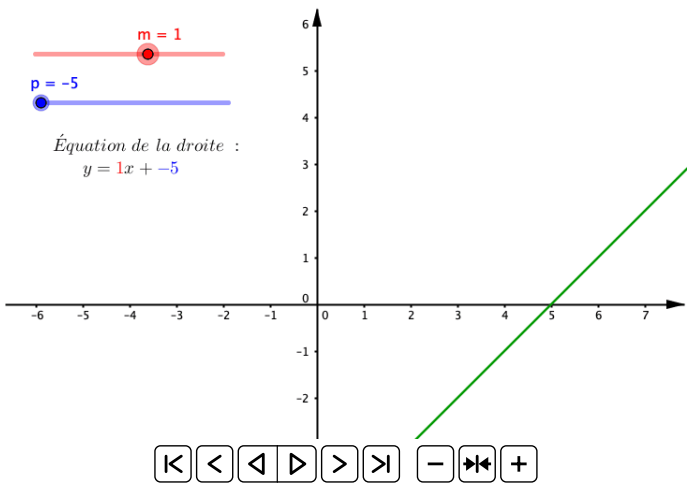
Définition : Soient m, p deux réels. La droite d'équation $y = mx + p$ est l'ensemble des points (x, y) du plan respectant l'équation.

Exemples : Le point $(1, 3)$ appartient à la droite d'équation $y = 2x + 1$ car si on remplace, x par 1 et y par 3, on a bien $y = 2x + 1$. En revanche, le point $(10, 5)$ n'appartient pas à cette droite.

Définition : Soient m, p deux réels et d la droite d'équation $y = mx + p$.

- m est appelé **coefficient directeur** de la droite d, c'est lui qui "dirige" la pente de la droite :
  - ⋆ Si $m \geq 0$ la pente est positive i.e. plus on avance à gauche plus la droite "monte".
  - ⋆ Si $m \leq 0$ la pente est négative i.e. plus on avance à gauche plus la droite "descend".
- p est appelé **ordonné à l'origine**. Il n'influe pas sur la pente de la droite.



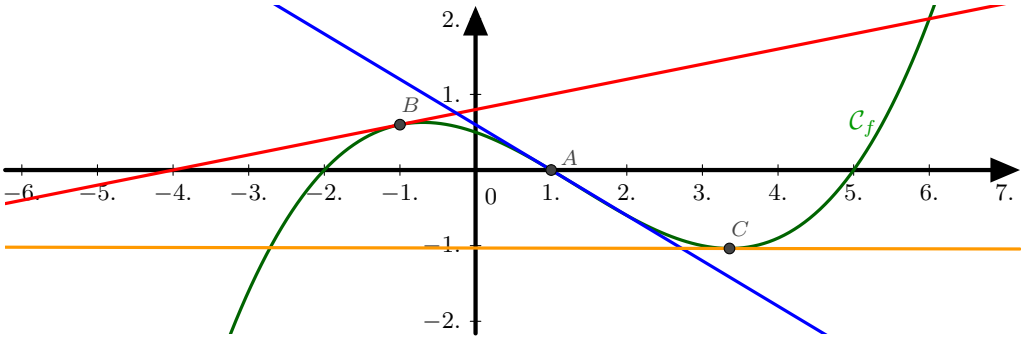


Remarque : On peut trouver l'équation d'une droite en ayant deux points données. On peut aussi retrouver graphiquement l'équation d'une droite. Ceci sera vu à la rentrée.

II) Nombre Dérivé

Définition : Une tangente à une courbe en un de ses points est une droite qui « touche » la courbe au plus près de la courbe en passant par ce point.

Exemple : On a tracé en vert, la courbe représentative d'une fonction f appelée $\mathcal{C}_f$ et trois de ses tangentes.

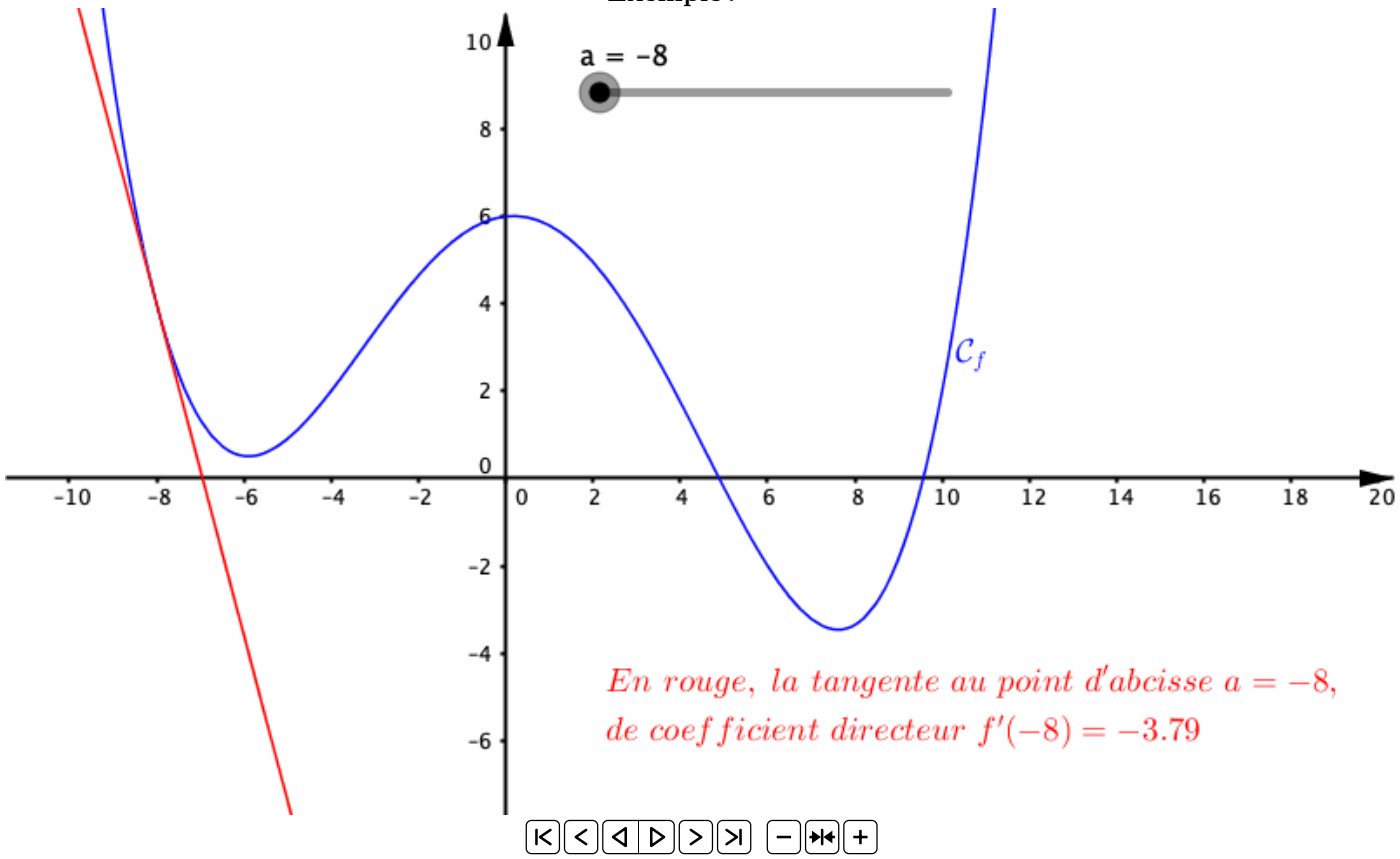


- Vu la pente de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A, elle possède un coefficient directeur négatif.
- La tangente au point B de la courbe $\mathcal{C}_f$ possède un coefficient directeur positif car plus on se décale à droite plus elle est "haute".
- Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point C est nul.

Définition : Soit a un réel. Si f est une fonction dérivable en a (sera vu à la rentrée) alors le nombre dérivé de f en a noté $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

Exemples : Dans l'exemple précédent, on avait donc $f'(-1) > 0$, $f'(1) < 0$ et $f'(3,3) = 0$.

Exemple :



Lorsque l'on regarde les tangentes des points d'abscisses a pour a qui va de gauche à droite, on remarque que les coefficients directeurs sont négatifs quand la courbe de f décroit et positif quand la courbe de f croit. De ce phénomène découle la proposition suivante.

Proposition : Soit f une fonction dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors,

- Si $f'(a) \geq 0$ pour tout $a \in I$ alors f est croissante sur I.
- Si $f'(a) \leq 0$ pour tout $a \in I$ alors f est décroissante sur I.

Remarque : D'après l'exemple précédent, on a bien :

- $f'(a) \leq 0$ de -9 à $-5,8$ environ et donc f est décroissante sur $I_1 =]-9, -5, 8[$.
- $f'(a) > 0$ de $-5,8$ à $0,5$ donc f est croissante sur $I_2 =]-5,8; 0,5[$.
- $f'(a) \leq 0$ de $0,5$ à $7,5$ environ et donc f est décroissante sur $I_3 =]0,5; 7,5[$.
- $f'(a) > 0$ de $7,5$ à 11 donc f est croissante sur $I_4 =]7,5; 11[$.

III) Calculer des Dérivées

Il existe une "formule" pour trouver le nombre dérivé au point d'abscisse a pour une certaine fonction f qui sera vu à la rentrée. Mais on peut les trouver sans cette définition. En effet, il existe des fonctions usuelles dont les dérivées sont à connaître par coeur et des formules suivants les opérations, elles aussi à connaître par coeur.

Proposition : Tableau des dérivées usuelles à connaître par coeur :

Dérivable sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) =$	$c,\ c \in \mathbb{R}$	$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\ln(x)$	e^x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$f'(x) =$	0	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$	e^x	$-\sin(x)$	$\cos(x)$

Exemple : Ainsi, si on prend la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On obtient que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$. Donc, peut importe la valeur de x, $f'(x) \geq 0$. Ainsi, la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition : Soient c un réel (appelé constante) et f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction cf est dérivable et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(cf')(x) = xf'(x)$$

Exemple : Si g est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = 2\ln(x)$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{x}.$$

Si h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 10x^4$ alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = 10 \times 4x^3 = 40x^3.$$

Proposition : Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ alors $h = f + g$ st une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Exemples : • Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + e^x$. Alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 3x^2 + e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Soit j la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $j(x) = 3\ln(x) - 4\sqrt{x} + 2\cos(x) + 1$. Alors j est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$j'(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - 2\sin(x).$$

Proposition : Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ alors $h = f \times g$ st une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

Exemples : • Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3e^x$. Alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 3x^2e^x + e^xx^3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Soit j la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $j(x) = \ln(x)(3\sqrt{x} + 2\cos(x) + 1)$. Alors j est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$j'(x) = \frac{1}{x}(3\sqrt{x} + 2\cos(x) + 1) + (\frac{3}{2\sqrt{x}} - 2\sin(x))\ln(x).$$

Proposition : Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec g qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ alors $h = \frac{f}{g}$ st une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}.$$

Exemples : • Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x^3}{e^x}$. Alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec le dénominateur ne s'annulant pas et $h'(x) = \frac{3x^2e^x - e^xx^3}{e^{2x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• Soit j la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $j(x) = \frac{\ln(x)}{3x^2+1}$. Alors j est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ avec un dénominateur ne s'annulant pas et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$j'(x) = \frac{\frac{1}{x}(3x^2+1) - 6x\ln(x)}{(3x^2+1)^2}.$$