

ENTRAINEMENT DS N°2

Exercice 1. Soit E un ensemble. On appelle algèbre de Boole sur E une partie de Γ de $\mathcal{P}(E)$ telle que :

$$(\star) \quad \emptyset \in \Gamma$$

$$(\star\star) \quad \forall A \in \Gamma, \overline{A} \in \Gamma.$$

$$(\star\star\star) \quad \forall (A, B) \in \Gamma^2, A \cup B \in \Gamma.$$

1. Soit A une partie de E différente de E et de l'ensemble vide. Montrer que $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \overline{A}, E\}$ est un exemple d'algèbre de Boole.
2. Soit Γ une algèbre de Boole quelconque.
 - (a) Montrer que $E \in \Gamma$.
 - (b) Montrer que : $\forall (A, B) \in \Gamma^2, A \cap B \in \Gamma$.
3. On appelle morphisme de Γ une application $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$ telle que
 - ($\star$) $\forall A \in \Gamma, f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$
 - ($\star\star$) $\forall (A, B) \in \Gamma^2, f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Soit f un tel morphisme sur Γ .
 - (a) Soit $A \in \Gamma$. Déterminer $f(A) \cup f(\overline{A})$. En déduire que $f(E) = E$ et $f(\emptyset) = \emptyset$.
 - (b) Montrer que :

$$\forall (A, B) \in \Gamma^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

- (c) Établir que :

$$\forall (A, B) \in \Gamma^2, (A \subset B \implies f(A) \subset f(B)).$$

- (d) On note $\mathcal{K} = \{A \in \Gamma, f(A) = \emptyset\}$. Montrer que f est injective si, et seulement si, $\mathcal{K} = \{\emptyset\}$.
4. Soit Γ une algèbre de Boole sur E . Pour tout $x \in E$, on pose :

$$C(x) = \{y \in E \mid \forall A \in \Gamma (x \in A \iff y \in A)\} \text{ et } \Gamma_x = \{X \in \Gamma \mid x \in X\}.$$

- (a) Montrer que :

$$C(x) = \bigcap_{X \in \Gamma_x} X.$$

- (b) Soient x et y deux éléments de E . Montrer que si $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ alors $C(x) = C(y)$.

CORRECTION ENTRAÎNEMENT DS N°2

Exercice 1.

1. Montrons que l'ensemble $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \bar{A}, E\}$ est une algèbre de Boole de E . $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ car tout les éléments de $\mathcal{F}$ sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$ i.e. des parties de E . Montrons que cet ensemble vérifie les trois conditions :

(★) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(★★) Tous les éléments de $\mathcal{F}$ ont leur complémentaire dans $\mathcal{F}$. En effet,

$$\overline{\emptyset} = E \in \mathcal{F}, \quad \overline{A} = \bar{A} \in \mathcal{F}, \quad \overline{\bar{A}} = A \in \mathcal{F}, \quad \overline{E} = \emptyset \in \mathcal{F}.$$

(★★★) L'union de deux éléments de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$. En effet,

$$\emptyset \cup A = A \in \mathcal{F}, \quad \emptyset \cup \bar{A} = \bar{A} \in \mathcal{F}, \quad \emptyset \cup E = E \in \mathcal{F}, \quad A \cup \bar{A} = E \in \mathcal{F} \text{ et } A \cup E = \bar{A} \cup E = E \in \mathcal{F}.$$

2. (a) Si Γ est une algèbre de Boole alors $\emptyset \in \Gamma$ par (★) et comme l'algèbre contient aussi tout les complémentaire par (★★), $E = \overline{\emptyset} \in \Gamma$.

(b) Soit $A, B \in \Gamma$. Alors par le point (★★), $\bar{A}, \bar{B} \in \Gamma$. Et par le point (★★★), $\bar{A} \cup \bar{B} \in \Gamma$. Si $\bar{A} \cup \bar{B} \in \Gamma$ alors sont complémentaire aussi par le deuxième point. Or, son complémentaire est, par les formules de Morgan :

$$\overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} = \bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}} = A \cap B.$$

Donc si $A, B \in \Gamma$ alors $A \cap B \in \Gamma$.

3. (a) Soit $A \in \Gamma$, $f(A) \cup f(\bar{A}) = f(A \cup \bar{A}) = f(E)$ d'après le point (★★). On a aussi $f(A) \cup f(\bar{A}) = f(A) \cup \overline{f(A)} = E$ d'après (★). Donc $E = f(E)$. Puis, par passage au complémentaire et en utilisant (★), on obtient $\emptyset = \overline{E} = \overline{f(E)} = f(\overline{E}) = f(\emptyset)$.

(b) On sait, par (★★) que :

$$f(\bar{A} \cup \bar{B}) = f(\bar{A}) \cup f(\bar{B}).$$

En passant, au complémentaire, avec la loi de Morgan et (★), on a

$$f(A \cap B) = f(\overline{(\bar{A} \cup \bar{B})}) \underset{(\star)}{=} \overline{f(\bar{A} \cup \bar{B})} = \overline{(f(\bar{A}) \cup f(\bar{B}))} = \overline{f(\bar{A})} \cap \overline{f(\bar{B})} \underset{(\star)}{=} f(\bar{\bar{A}}) \cap f(\bar{\bar{B}}) = f(A) \cap f(B).$$

- (c) Soient $(A, B) \in \Gamma^2$ et supposons que $A \subset B$. Soit $y \in f(A)$ donc il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or, $A \subset B$ donc $x \in B$ et donc $y \in f(B)$. On a bien $f(A) \subset f(B)$.

(d) Procédons par double implication pour montrer cette équivalence.

- Montrons que : f injective $\implies \mathcal{K} = \{\emptyset\}$. Supposons donc que f est injective. Soit $A \in \mathcal{K}$ donc $f(A) = \emptyset = f(\emptyset)$. Or, f est injective donc $f(A) = f(\emptyset) \implies A = \emptyset$ car f est injective. Ainsi, $\mathcal{K}$ ne contient que l'ensemble vide.
- Montrons que : $\mathcal{K} = \{\emptyset\} \implies f$ injective. Supposons donc $\mathcal{K} = \{\emptyset\}$. Soient $A_1, A_2 \in \Gamma$ tels que $f(A_1) = f(A_2)$. On a donc $f(\bar{A}_1) = f(\bar{A}_2) = \overline{f(A_1)} = \overline{f(A_2)} = f(\bar{A}_2)$. Ainsi,

$$f(A_1 \cap \bar{A}_2) = f(A_1) \cap f(\bar{A}_2) = f(A_1) \cap \overline{f(A_1)} = \emptyset.$$

Donc $A_1 \cap \bar{A}_2 \in \mathcal{K}$. Or, on a supposer que $\mathcal{K} = \{\emptyset\}$ donc $A_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$. Ainsi, si $x \in A_1$ alors $x \notin \bar{A}_2$ et donc $x \in A_2$ ce qui prouve que $A_1 \subset A_2$.

De même, on montre que $f(\bar{A}_1 \cap A_2) = \emptyset$ et donc que $\bar{A}_1 \cap A_2 = \emptyset$. Ainsi, si $x \in A_2$ alors $x \notin \bar{A}_1$ et donc $x \in A_1$. D'où $A_2 \subset A_1$. On a donc en conclusion $A_1 = A_2$ et f injective.

4. (a) Procédons par double inclusion :

- Soit $y \in C(x)$. Alors, pour tout $A \in \Gamma$, $x \in A$ si et seulement si $y \in A$. Soit $X \in \Gamma_x$. Comme $x \in X$ alors X contient aussi y car $y \in C(x)$. Ainsi, $y \in X$. Donc, pour tout $X \in \Gamma_x$, $y \in X$, ainsi, $y \in \bigcap_{X \in \Gamma_x} X$. On a donc

$$C(x) \subset \bigcap_{X \in \Gamma_x} X.$$

- Soit $y \in \bigcap_{X \in \Gamma_x} X$. Alors y appartient à toutes les parties de Γ qui contiennent x . Donc pour tout $A \in \Gamma$, $x \in A \implies y \in A$. Réciproquement, si $x \notin A$ alors $x \in \bar{A}$ donc $y \in \bar{A}$ i.e. $y \notin A$. On a bien $y \in C(x)$ et donc $\bigcap_{X \in \Gamma_x} X \subset C(x)$.

- (b) Supposons $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ i.e. il existe $z \in E$ tel que $z \in C(x) \cap C(y)$. On a pour toute partie $A \in \Gamma$, $(x \in A \iff z \in A)$ et $(y \in A \iff z \in A)$. Soit $u \in C(x)$. Montrons alors que $u \in C(y)$. $u \in C(x)$ veut dire que $u \in A \iff x \in A$ pour tout $A \in \Gamma$. Or, $x \in A \iff z \in A$ et $z \in A \iff y \in A$. On a donc $u \in A \iff y \in A$ et donc $u \in C(y)$. Ainsi, $C(x) \subset C(y)$. Réciproquement, le raisonnement est exactement le même, donc $C(y) \subset C(x)$ d'où l'égalité.