1 Saut du grand plongeoir

Un baigneur de masse $m = 75$ kg saute d'un plongeoir de hauteur $h = 5$ m.

1. Estimer la vitesse v_0 du baigneur lorsqu'il atteint la surface de l'eau.

Lorsqu'il est dans l'eau, le baigneur ne fait aucun mouvement. On modélise les frottements de l'eau par une force de la forme :

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$$

avec $\alpha \simeq 250$ kg.s^{-1}.
La densité du corps humain vaut environ $d = 0,9$. On note Oz l'axe vertical descendant, l'origine O étant située à la surface de l'eau. On choisit comme origine des temps l'instant où le baigneur entre dans l'eau.

2. Donner l'expression de la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ en fonction de m, d et du champ de pesanteur $\vec{g}$.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la composante verticale v_z du vecteur vitesse. La mettre sous sa forme canonique en introduisant un temps caractéristique τ et une vitesse limite $v_{\text{lim}} > 0$, que l'on exprimera en fonction de m, g, d et α. Calculer les valeurs de τ et v_{lim}.
4. Établir l'expression de la position z du baigneur en fonction de t, τ, v_0 et v_{lim}.
5. Établir l'expression de la profondeur maximale z_{max} atteinte par le baigneur, en fonction de τ, v_0 et v_{lim}. Calculer sa valeur.

2 Chute dans l'air

On étudie la chute d'une goutte d'eau de masse m dans l'air. On modélise les frottements de l'air par une force de la forme :

$$\vec{f} = -\frac{1}{2}\rho_a S C_x v\vec{v}$$

où ρ_a est la masse volumique de l'air, S est la surface projetée de la goutte dans un plan perpendiculaire à la direction du mouvement et C_x le coefficient de traînée. Le coefficient de trainée dépend la forme de l'objet et vaut environ $C_x = 0,5$ dans le cas d'une sphère.[1] On note R le rayon de la goutte et ρ_e la masse volumique de l'eau.

1. Vérifier que le coefficient C_x est sans dimension.
2. Justifier que la poussée d'Archimède est négligeable.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v de la goutte.
4. En déduire l'expression de la vitesse limite v_{lim} d'une goutte de pluie en régime permanent, en fonction de g, C_x, R, ρ_a et ρ_e la masse volumique de l'eau. Une grosse goutte tombe-t-elle plus ou moins vite qu'une petite ? Calculer l'ordre de grandeur de v_{lim}.
5. Écrire l'équation différentielle sous une forme adimensionnée (c'est-à-dire sur des grandeurs adimensionnées $\tilde{v} = \frac{v}{v_{\text{lim}}}$ et $\tilde{t} = \frac{t}{\tau}$), en faisant apparaître un temps caractéristique τ. Calculer l'ordre de grandeur de τ.
6. Construire une longueur caractéristique L du mouvement et calculer son ordre de grandeur. Que représente-t-elle physiquement ?
7. Écrire un programme python pour résoudre l'équation différentielle adimensionnée avec la condition initiale $\tilde{v}(0) = 0$ par la méthode d'Euler. Tracer le graphe de $\tilde{v}$ en fonction $\tilde{t}$ pour $\tilde{t} \in [0, 5]$.

3 Mouvement sur plan incliné

Une brique de masse m est lancée vers le haut, avec une vitesse v_0, sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale, dans un champ de pesanteur de norme g.

1. Dans un premier temps on néglige les frottements. Établir l'expression de la distance parcourue par la brique avant de redescendre.
2. On modélise maintenant les frottements du support sur la brique par une réaction tangentielle $\vec{R_t}$ avec $R_t = fR_n$ où R_n est la réaction normale du support et f le coefficient de frottement. Établir l'expression de la distance parcourue par la brique avant de redescendre.

1. On pense souvent que les gouttes de pluie ont une forme profilée. En réalité, à l'échelle d'une goutte de pluie, la tension de surface reste prépondérante devant les forces de frottement de l'air. Par conséquent la goutte, même en mouvement, garde une forme proche de celle qui minimise sa surface, la sphère.

4 Tir d'un projectile dans le champ de pesanteur

Un projectile est lancé depuis le sol, avec une vitesse v_0 dans un champ de pesanteur de norme g, supposé uniforme. On note α l'angle du vecteur vitesse initial avec l'horizontale.

1. Établir l'équation de la trajectoire $y(x)$. Tracer son allure.
2. Établir l'expression de l'altitude maximale y_{max} atteinte par le projectile. Pour quelle valeur de α, y_{max} est-elle maximale ?
3. Établir l'expression de la portée x_p. Pour quelle valeur de α la portée est-elle maximale ?
4. Exprimer $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ en fonction de $\tan\alpha$.
5. Établir la condition sur x, y, v_0 et g, pour qu'il existe un angle α permettant d'atteindre le point de coordonnées (x, y) pour une vitesse v_0 fixée. En déduire l'équation de la courbe de sûreté, au delà de laquelle les points ne sont plus atteignables.
6. Écrire un script python permettant de tracer la trajectoire pour 10 valeurs de α régulièrement espacées entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, ainsi que la parabole de sureté. On prendra $g = 9,8$ m.s^{-2} et $v_0 = 10$ m/s.

5 Mouvement d'une bulle de champagne

On considère une bulle sphérique de dioxyde de carbone, de rayon R, dans un verre de champagne. A l'instant $t = 0$, la bulle quitte le fond du verre avec une vitesse nulle. La bulle est repérée par sa coordonnée z sur un axe Oz vertical ascendant, dont l'origine O est choisie au fond du verre.
Le champagne exerce sur la bulle une force de frottement fluide donnée par la formule de Stokes :

$$\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$$

où η est la viscosité dynamique du champagne.

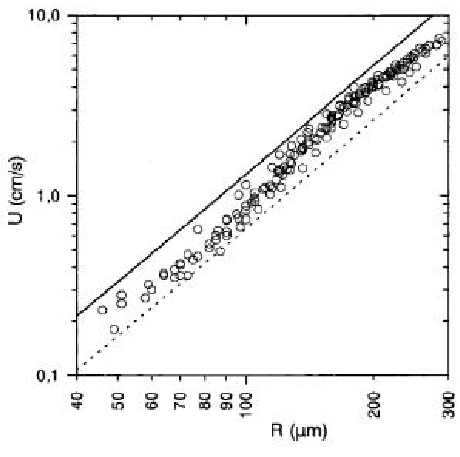
Données :

— Masse volumique du champagne : $\rho_{\text{ch}} \simeq 1$ kg/L

— Masse volumique du dioxyde de carbone à 15°C et 1,013 bar : $\rho_{CO_2} = 1,87$ kg.m^{-3}

1. Déterminer la dimension de η.
2. Montrer que le poids de la bulle est négligeable.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v de la bulle. La mettre sous sa forme canonique, en faisant apparaître la constante de temps τ et la vitesse limite en régime permanent U, dont on donnera les expressions en fonction de η, R, ρ_{CO_2}, ρ_{ch} et g.
4. Établir la loi horaire $z(t)$, en fonction de U et τ.

Des chercheurs ont mesuré la vitesse limite des bulles pour différents rayons. On a représenté ci-dessous le graphe de U en fonction de R en échelle log-log (c'est-à-dire qu'on a en fait représenté $\ln(U)$ en fonction de $\ln(R)$, mais les valeurs indiquées sur les axes sont celles de U et R).



5. Est-ce cohérent d'observer une droite, dans ce graphe ? Déterminer le coefficient directeur de la droite. Conclure.
6. En utilisant le graphe, estimer la constante de temps τ pour une bulle de rayon 100 µm. Commenter.
7. Estimer le temps mis par une bulle pour remonter à la surface dans une flûte à champagne.

6 Partie immergé d'un iceberg

La densité de la glace vaut 0,9.

1. Déterminer le volume immergée d'un iceberg de volume V.
2. La fonte de la banquise (glace à la surface des océans) est-elle responsable de l'augmentation de volume des océans ?

7 L'élève et le bus

A 21 m d'un arrêt de bus, un élève apercoit son bus. Le bus démarre avec une accélération constante de 2 m.s^{-2}.
L'élève se met alors à courir à 10 m/s pour rattraper son bus.
A quelle distance de l'arrêt, l'élève parvient-il à rattraper le bus ?

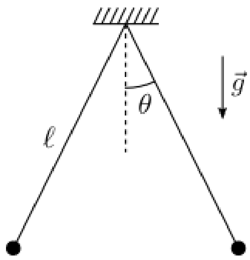
8 Ski de vitesse

Le ski de vitesse (ou kilomètre lancé) consiste à descendre une piste enneigée le plus vite possible sans faire de virage. Les frottements de la neige sont négligeables par rapport aux frottements de l'air qui peuvent être modélisés par une force de la forme $\vec{f} = -\beta v \vec{v}$. On note α l'angle de la piste avec l'horizontale.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v d'un skieur.
2. Adimensionner cette équation en faisant apparaître une vitesse caractéristique u et un temps caractéristique τ.
3. Le record du monde de ski de vitesse, établi sur la piste de l'Aiguille rouge aux Arcs, est de 251,4 km/h. L'inclinaison moyenne de la piste de l'Aiguille rouge est de 70% (c'est-à-dire que lorsqu'on se déplace de 100 m horizontalement, on se déplace de 70 m verticalement). En déduire un ordre de grandeur de la longueur de la zone d'élan pour atteindre la vitesse maximale.

9 Pendule électrostatique

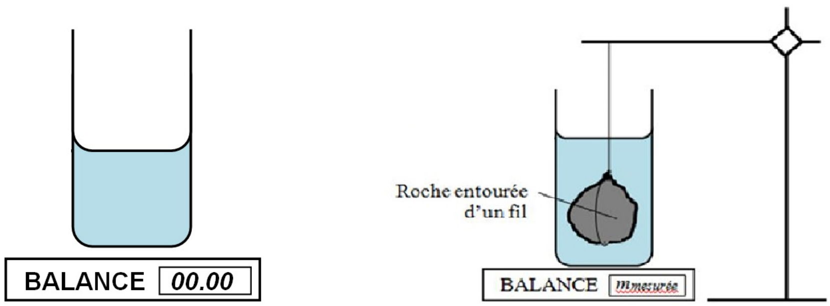
Deux petites boules sont suspendues à des fils de longueur ℓ, accrochés au même point. Chaque boule, de masse m, porte une charge électrique q. A l'équilibre les deux fils font un angle 2θ.



Établir l'expression de q en fonction de ε_0, g, m, ℓ et θ.

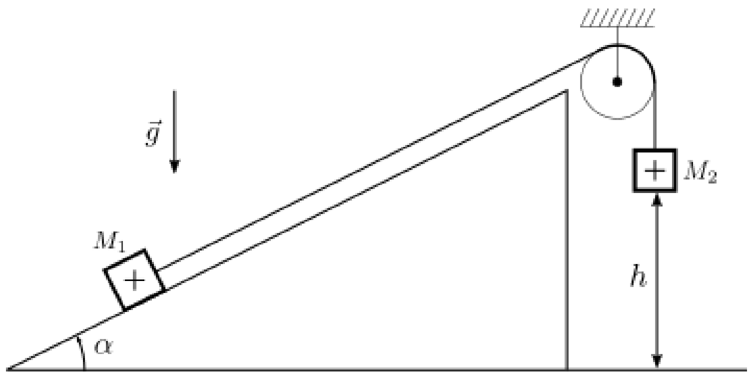
10 Détermination du volume d'un échantillon à l'aide d'une balance

On dispose d'un échantillon de roche dont on souhaite déterminer la masse volumique et d'une balance.Pour mesurer le volume de l'échantillon, on réalise l'expérience suivante. La balance est tarée avec un récipient rempli d'eau. Puis l'échantillon de roche est suspendu à un fil et plongé dans le récipient.



1. En considérant le système {récipient + eau}, déterminer l'expression de la masse mesurée par la balance.
2. En déduire un protocole pour mesurer la masse volumique de l'échantillon.

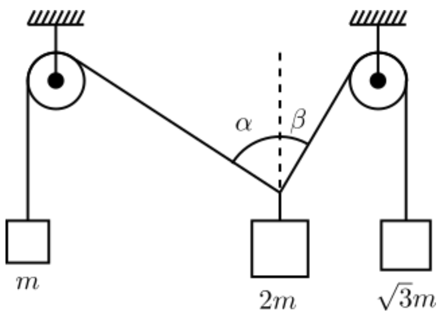
11 Poulie et plan incliné



Le dispositif ci-dessus est lâché sans vitesse initiale. Les solides repérés par M_1 et M_2 ont une même masse m. La poulie est supposée idéale (sans frottements et de moment d'inertie négligeable). On suppose également que le solide 1 glisse sans frottements sur le plan incliné.

Établir l'expression du temps pour que le solide 2 touche le sol, en fonction de h, g et α.

12 Poulies en équilibre



Déterminer les angles α et β à l'équilibre.