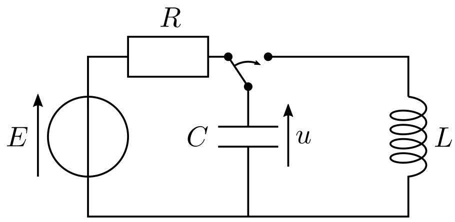
1 Circuit LC

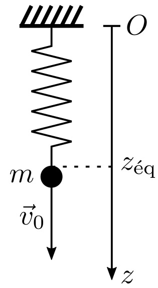
A l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur.



1. Montrer que u vérifie l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation propre ω_0.
2. En déduire $u(t)$ en fonction de E et ω_0.
3. Faire un bilan énergétique.
4. Tracer l'allure des graphes $u(t)$, $i(t)$, $E_e(t)$ et $E_m(t)$.

2 Système masse-ressort vertical

Une masse m est suspendue à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k, dans un champ de pesanteur $\vec{g} = g\vec{u}_z$, où $\vec{u}_z$ est le vecteur unitaire selon l'axe Oz. A l'instant $t = 0$, la masse est lancée depuis sa position d'équilibre $z_{\text{éq}}$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$.



1. Déterminer la position d'équilibre $z_{\text{éq}}$ en fonction de m, ℓ_0, g et k.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par z et la mettre sous la forme :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{éq}}$$

   où ω_0 est une constante dont donnera l'expression.
3. En déduire la loi horaire $z(t)$ en fonction de v_0, ω_0 et $z_{\text{éq}}$.

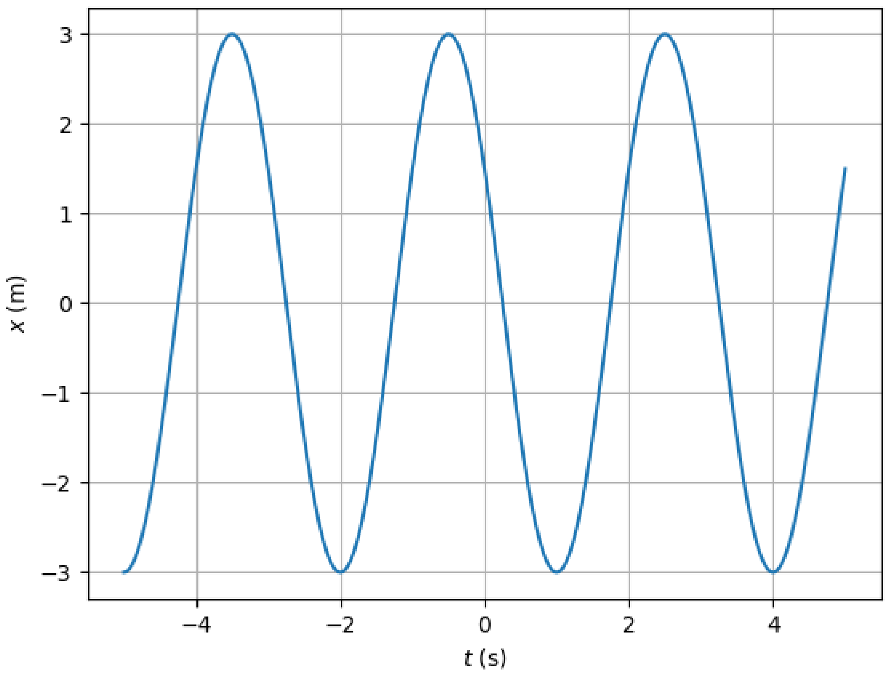
3 Amplitude et phase à l'origine

Les solutions de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

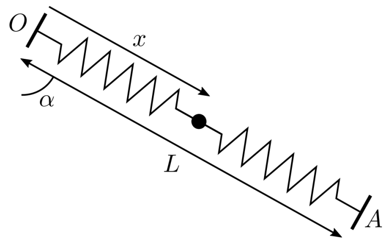
peuvent s'écrire $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \phi)$, où X (> 0) et ϕ ($\in]-\pi, \pi]$) sont des constantes, respectivement nommées amplitude et phase à l'origine.

1. Le graphe de $x(t)$ est représenté ci-dessous. Déterminer les valeurs de X, ω_0 et ϕ.



2. Tracer l'allure du graphe de $x(t)$, pour $X = 2$ m, $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$ rad/s et $\phi = -\frac{\pi}{4}$.

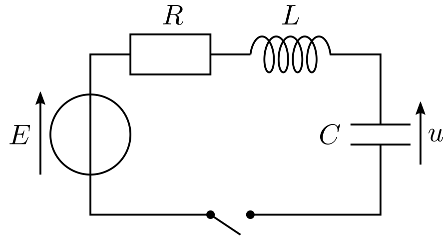
4 Système masse-ressort incliné



Un anneau de masse m peut coulisser sans frottement le long d'une tige OA, de longueur L, inclinée d'un angle α par rapport à la verticale. L'anneau est accroché à deux ressorts identiques, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 enroulés sur la tige, l'un accroché en O et l'autre en A.
L'anneau est lâché sans vitesse initiale de la position $x = L/2$.

1. Déterminer la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$.
2. Établir la loi horaire $x(t)$.

5 Circuit RLC soumis à un échelon de tension



On considère le circuit ci-contre avec $R = 100\ \Omega$, $L = 10$ mH et $C = 1\ \mu$F. Le condensateur est initialement déchargé. A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

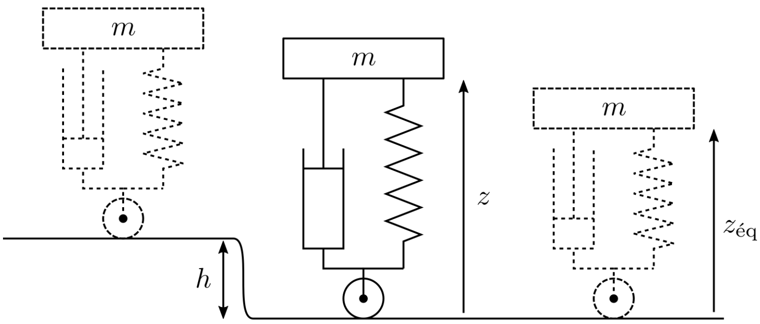
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par u. En déduire les expressions et les valeurs de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.
2. Représenter l'allure du graphe de $u(t)$.
3. Déterminer complètement la loi $u(t)$ en fonction de E et ω_0. (On remplacera Q par sa valeur numérique)

6 Suspension de voiture

On étudie le mouvement vertical du châssis d'un véhicule, par rapport au sol. A l'instant $t = 0$, le véhicule descend d'un trottoir de hauteur h. La masse des roues étant négligeable devant celle du véhicule, on suppose que les roues restent en permanence en contact avec la route.

Le système de suspension du véhicule peut être modélisé par l'association d'un ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, et d'un amortisseur provoquant une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

On note $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, le champ de pesanteur, où $\vec{u}_z$ est le vecteur unitaire vertical orienté vers le haut. La châssis de masse m est repéré par sa position z par rapport au sol.

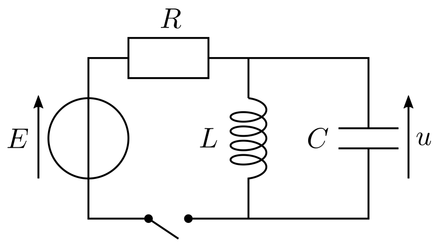


1. Déterminer l'expression de la position d'équilibre z_{eq}.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par z et la mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta\omega_0\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{éq}}$$

   où ζ est le facteur d'amortissement, dont on donnera l'expression.
3. Déterminer la valeur de ζ pour laquelle l'amortissement est optimal, c'est-à-dire pour que le châssis revienne le plus rapidement possible à sa position d'équilibre sans oscillations.
4. L'usure des amortisseurs entraîne une diminution du coefficient λ. Dans quel régime se trouve une suspension usée ?
5. On choisit le coefficient λ pour que l'amortissement soit optimal lorsque le véhicule est chargé. Dans quel régime se trouve la suspension lorsque le véhicule est vide ?
6. Déterminer l'expression de $z(t)$ en fonction de $z_{\text{éq}}$, ω_0 et h, pour un amortissement optimal.
7. Le temps de réponse de la suspension d'une voiture est de l'ordre de 0,3 s. Estimer la hauteur de laquelle s'abaisse le châssis lorsque 4 personnes montent dans une voiture.

7 Circuit RLC parallèle

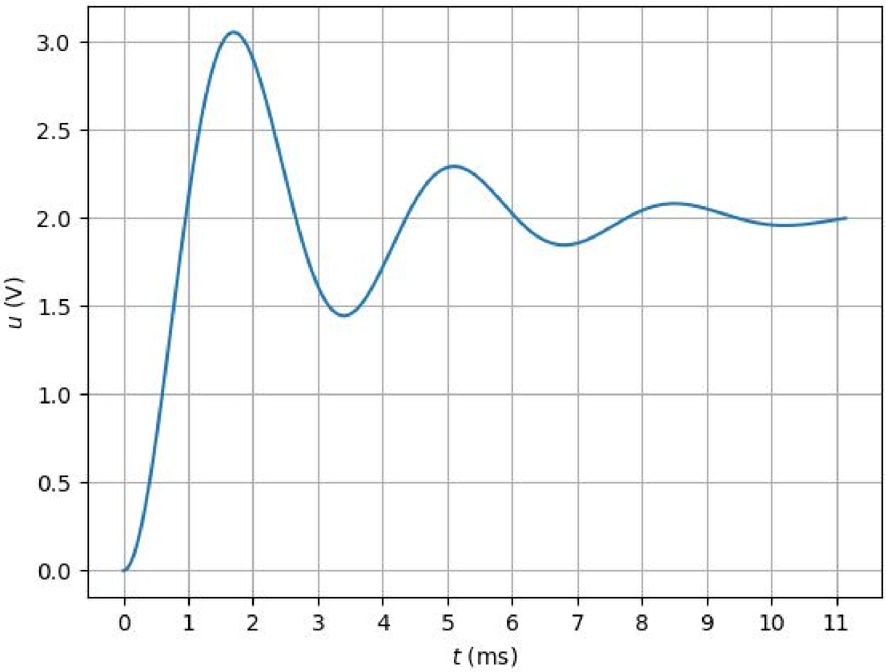


On considère le circuit ci-contre avec $R = 50\ \Omega$, $L = 10$ mH et $C = 250$ nF.A l'état initial, l'énergie stockée dans le circuit est nulle. A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Établir les expressions de ω_0 et Q. Calculer leurs valeurs.
2. Représenter l'allure du graphe $u(t)$.
3. Déterminer complètement la loi $u(t)$ en fonction de E et ω_0. (On remplacera Q par sa valeur numérique)

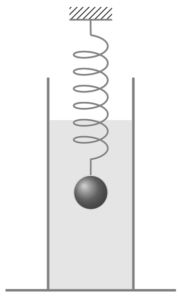
8 Détermination graphique de ω_0 et Q

La réponse d'un circuit RLC à un échelon de tension est représentée ci-dessous.



Déterminer les valeurs de ω_0 et Q.

9 Mesure de viscosité



Dans un liquide visqueux, la force de frottement subit par une sphère est donnée par la loi de Stokes :

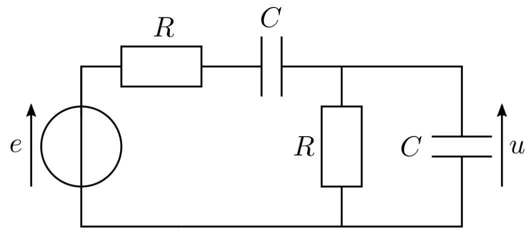
$$\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$$

où R est le rayon de la sphère et η le coefficient de viscosité du liquide.

Une sphère de masse m et de rayon R est suspendue à un ressort. Dans un premier temps, on mesure la période T_0 des oscillations dans l'air, de viscosité négligeable. Puis, la sphère est plongée dans un liquide de viscosité η inconnue et on mesure à nouveau la période T_1 des oscillations.

Établir l'expression du coefficient de viscosité η en fonction de m, R, T_0 et T_1.

10 Circuit à deux condensateurs

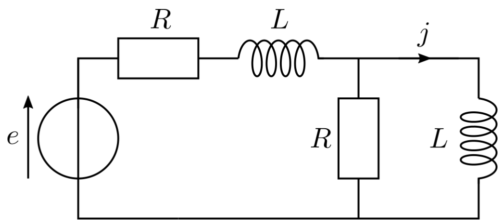


Le générateur délivre un échelon de tension :

$$e = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ E \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

Déterminer l'expression de $u(t)$. On pourra poser $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

11 Circuit à deux bobines



Le générateur délivre un échelon de tension vers le bas :

$$e = \begin{cases} E \text{ pour } t < 0 \\ 0 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

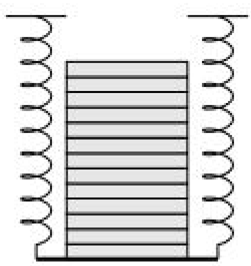
Déterminer l'expression de $j(t)$. On pourra poser $\omega_0 = \frac{R}{L}$.

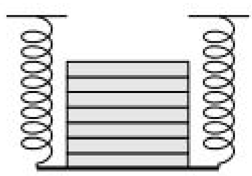
12 Masse sur un plateau

Une masse m est posée sur un plateau de masse M, suspendu à un ressort de raideur k.
On tire le plateau vers le bas, qui se déplace d'une distance a par rapport à sa position d'équilibre, et on le lâche sans vitesse initiale.
La masse décolle-t-elle du plateau ?

13 Distributeur de plateaux

Dans un distributeur de plateaux de cantine, les plateaux sont empilés sur un support, suspendu à deux ressorts identiques. La raideur k de chaque ressort est telle que le haut de la pile de plateaux soit toujours à la même hauteur, quel que soit le nombre de plateaux empilés. Un plateau a une masse de 300 g et une épaisseur de 2 cm.

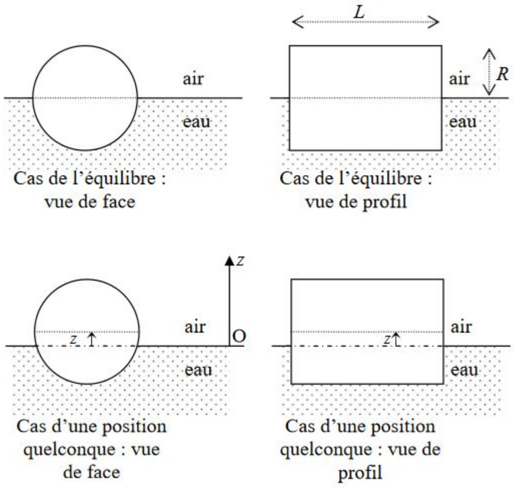




Estimer la raideur k des ressorts.

14 Oscillations d'un bouchon à la surface de l'eau

Un bouchon de liège cylindrique flotte horizontalement à la surface de l'eau, de masse volumique ρ_e. Il a pour longueur L et son rayon est égal à R. La position du bouchon est repérée par l'abscisse z de son centre de gravité. L'axe Oz est vertical et dirigé vers le haut. Le point O est au niveau de la surface de l'eau. On suppose que le bouchon garde toujours son axe horizontal au cours du mouvement.



1. A l'équilibre, le bouchon est à moitié enfoncé dans l'eau, soit $z_{\text{éq}} = 0$. Déterminer la densité du liège.
2. On suppose $z \ll R$. Exprimer le volume immergé du bouchon en fonction de z, R et L.
3. Établir l'équation du mouvement vérifiée par $z(t)$, dans le cas $z \ll R$. En déduire l'expression de la période des oscillations en fonction de g et R.