1 Liens entre les coordonnées

1. Dans le plan, exprimer les coordonnées cartésiennes (x, y) en fonction des coordonnées polaires (r, θ).
2. Dans l'espace, exprimer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) en fonction des coordonnées sphériques (r, θ, φ).

2 Centrifugeuse

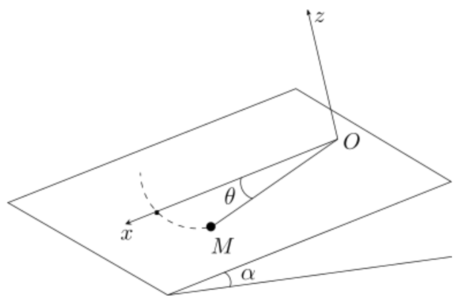
Dans le journal de bord de Thomas Pesquet, on peut lire : *« À la Cité des étoiles, la centrifugeuse est utilisée pour reproduire les accélérations que nous subirons dans le Soyouz, au décollage et pendant la rentrée dans l'atmosphère. Généralement, l'entraînement commence par une simple familiarisation : dans la centrifugeuse en mouvement, on nous demande de lire des affichages, de retenir des séquences de chiffres, de déclencher des communications radio. Le but est de vérifier que nous restons en possession de nos moyens, sous des accélérations de plus en plus grandes. Jusqu'à 9 g (on pèse alors 9 fois notre poids) ! À ces accélérations, on a le visage déformé, et il faut bloquer sa cage thoracique pour ne pas qu'elle s'écrase. »*

1. En exploitant la photo de la centrifugeuse (le spationaute prend place à l'extrémité du bras), estimer la vitesse de rotation du bras en tr/s.
2. A l'instant $t = 0$, on coupe le moteur. La centrifugeuse met 10 tours pour s'arrêter, sous l'effet des frottements. Déterminer le temps que met la centrifugeuse pour s'arrêter. On supposera la décélération constante.

3 Pendule sur plan incliné

On réalise un pendule simple à l'aide d'un mobile autoporteur sur table à coussin d'air, pouvant se déplacer sans frottements. Le mobile de masse m est accroché à l'extrémité d'un fil de longueur ℓ dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe O de la table. Le pendule est lâché sans vitesse initiale d'un petit angle θ_0 par rapport à l'axe Ox.

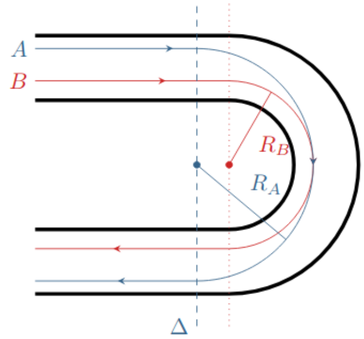
Établir la loi horaire $\theta(t)$ dans le cadre de l'approximation des petits angles. Donner l'expression de la période du mouvement.



4 Trajectoire de formule 1

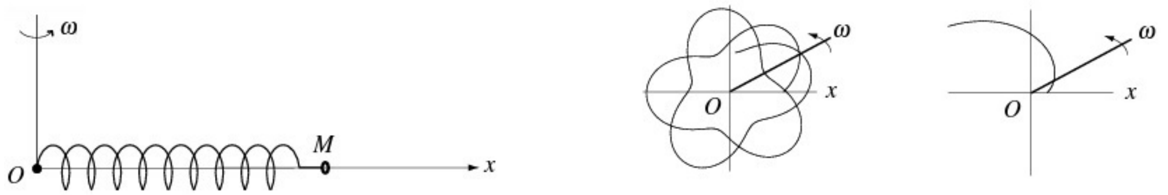
Lors des essais chronométrés d'un grand prix, Fernando Alonso et Jenson Button arrivent en ligne droite et coupent l'axe Δ au même instant de leur parcours. Alonso suit une trajectoire circulaire de rayon $R_A = 90$ m tandis que Button choisit une trajectoire de rayon $R_B = 75$ m. Pour maintenir l'adhérence, l'accélération des formules 1 doit rester inférieure à $0,8g$.

Quelle est la meilleure trajectoire ? On supposera que les vitesses des deux pilotes sont constantes entre leurs deux passages par l'axe Δ.



5 Mouvement d'une perle sur une tige en rotation

Une petite perle, assimilée à un point matériel M, glisse sans frottement sur une tige horizontale tournant à vitesse constante ω autour de la verticale Oz. La perle est liée au point O par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. À l'instant $t = 0$, le ressort n'est ni comprimé ni tendu et la perle a une vitesse nulle par rapport à la tige. On a représenté ci-dessous la trajectoire pour différentes valeurs de ω.



La perle M est repérée par ses coordonnées polaires (r, θ).
On note $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre du système masse-ressort.

1. Établir l'équation du mouvement vérifiée par $r(t)$.
2. A quelle condition sur ω et ω_0 la trajectoire est-elle bornée ?
3. Établir la loi horaire $r(t)$ dans chaque cas : $\omega < \omega_0$, $\omega = \omega_0$ et $\omega > \omega_0$.
4. Déterminer la force $\vec{R}$ que la tige exerce sur la perle.

6 Lancer du marteau

Le lancer du marteau est une discipline de l'athlétisme, qui consiste à lancer le plus loin possible, un boulet en acier de 4,00 kg pour les femmes et 7,26 kg pour les hommes. Le boulet est fixé à un câble en acier de 1,2 m de long, relié à une poignée. L'athlète fait d'abord prendre de la vitesse à son marteau en tournant sur lui-même, puis lâche le marteau. Le record du monde masculin est de 86,74 m et le record du monde féminin de 82,29 m.

Estimer la tension du câble juste avant que le lanceur ne lâche le marteau.

Correction

3 Pendule sur plan incliné

Repérage : $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{u}_r$, $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, $\vec{a} = \ell\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\vec{u}_r$

Bilan des forces :

— poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(-\cos\alpha\vec{u}_z + \sin\alpha\vec{u}_x) = mg\left[-\cos\alpha\vec{u}_z + \sin\alpha(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta)\right]$

— tension du fil $\vec{T} = -T\vec{u}_r$

— réaction du support $\vec{R} = R\vec{u}_z$

— poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(-\cos\alpha\vec{u}_z + \sin\alpha\vec{u}_x) = mg\left[-\cos\alpha\vec{u}_z + \sin\alpha(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta)\right]$

On applique le principe fondamental de la dynamique au mobile

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}$$

En projetant selon $\vec{u}_\theta$, on a

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\alpha\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g\sin\alpha}{\ell}\sin\theta = 0$$

Remarque : pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on retrouve l'équation du pendule simple vertical.
Dans l'approximation des petits angles, $\sin\theta \simeq \theta$, d'où

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

avec la pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{\ell}}$$

Les solutions sont de la formes

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Conditions initiales

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 = A \\ \dot{\theta}(0) = 0 = \omega_0 B \end{cases}$$

Ainsi,

$$\theta(t) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g\sin\alpha}{\ell}}t\right)$$

La période du mouvement est : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\frac{\ell}{g\sin\alpha}$