I Produit vectoriel

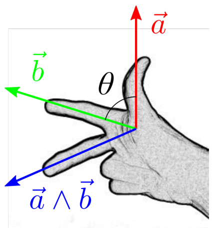
1 Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, noté $\vec{a} \wedge \vec{b}$, est l'unique vecteur tel que

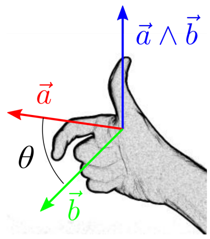
— $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b}$

— $\boxed{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\| \times \sin\theta}$, où θ est l'angle (non orienté) entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

— $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b})$ est une **base directe**, c'est-à-dire dont le sens est donné par la règle de la main droite : si on place le pouce selon le vecteur $\vec{a}$, l'index selon le vecteur $\vec{b}$, alors le sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est donné par le majeur.



Une autre visualisation de la règle de la main droite est la règle du tire-bouchon : si on place l'index dans le sens de rotation de $\vec{a}$ vers $\vec{b}$, alors le sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est donné par le pouce.



Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est le vecteur nul $\vec{0}$ (dans ce cas, $\theta = 0$).

Le produit vectoriel est antisymétrique : $\boxed{\vec{b} \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \vec{b}}$

2 Expression dans une base orthonormale directe

On considère une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ orthonormale directe. Les bases $(\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_1)$ et $(\vec{u}_3, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$, obtenues par permutation circulaire des 3 vecteurs sont également directes. On a alors :

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{u}_3 \qquad \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \qquad \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 = \vec{u}_2$$

Soient $\vec{a} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$ et $\vec{b} = b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3$

$$\begin{aligned}\vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3) \wedge (b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3)\\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{u}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{u}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{u}_3\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{u}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \vec{u}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{u}_3}$

II Force de Lorentz

Un charge ponctuelle q plongée dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ subit la force de Lorentz :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

1 Ordres de grandeur

— Masse d'un nucléon : $m = \frac{1 \text{ g/mol}}{\mathcal{N}_\text{A}}$ avec $\mathcal{N}_\text{A} = 6,0 \times 10^{23}$ mol^{-1}, soit $m \sim 10^{-27}$ kg

— Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C

— Norme du champ de pesanteur : $g = 10$ m.s^{-2}

— Ordre de grandeur d'un champ électrique usuel : $E \sim 1$ V/m

— Champ magnétique terrestre : $B = 5 \times 10^{-5}$ T

— L'énergie cinétique usuelle d'un proton est de l'ordre de l'électronvolt :
$E_\text{c} = \frac{1}{2}mv^2 \sim 1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19}$ J, d'où $v = \sqrt{\frac{2E_\text{c}}{m}} \sim 10^4$ m/s

On compare les ordres de grandeur des forces électrique $\vec{F}_\text{e} = q\vec{E}$ et magnétique $\vec{F}_\text{m} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ exercées sur un proton, avec le poids.

$$P = mg \sim 10^{-26} \text{ N} \qquad F_\text{e} = |q|E = eE \sim 10^{-19} \text{ N} \qquad F_\text{m} = \|q\vec{v} \wedge \vec{B}\| \sim evB \sim 10^{-19} \text{ N}$$

Ainsi, pour une particule chargée, **le poids est toujours largement négligeable devant les forces électrique et magnétique**.

2 Puissance de la force de Lorentz

$$P\left(\vec{F}\right) = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v} + q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v}$$

Or par définition, $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est orthogonal à $\vec{v}$, donc $\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v} = 0$, donc la force magnétique ne travaille pas.
Par conséquent, un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique ne peut que courber la trajectoire sans modifier la norme du vecteur-vitesse.

3 Énergie potentielle électrostatique

a Champ créé par une charge ponctuelle

La force électrique exercée par une charge Q située au point O sur une charge q, située au point M, s'écrit, en coordonnées sphériques :

$$\boxed{\vec{F}_\text{e} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$$

où $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ A^2.s^4.kg^{-1}.m^{-3} (ou F/m : farad par mètre) est la permittivité du vide.

On cherche E_pe l'énergie potentielle électrostatique telle que :

$$\text{d}E_\text{pe} = -\vec{F}_\text{e} \cdot \text{d}\overrightarrow{OM} \qquad \text{avec } \text{d}\overrightarrow{OM} = \text{d}r\vec{u}_r + r\text{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\text{d}\varphi\vec{u}_\varphi$$

$$\text{c'est-à-dire } \text{d}E_\text{pe} = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\text{d}r$$

$$\text{c'est-à-dire } \frac{\text{d}E_\text{pe}}{\text{d}r} = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\text{c'est-à-dire } E_\text{pe} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{ cste}$$

La fonction $E_\text{pe}(M)$ existe donc $\vec{F}_\text{e}$ est une force conservative. On choisit $\lim\limits_{r\to+\infty} E_\text{pe} = 0$, d'où cste $= 0$. Ainsi,

$$E_\text{pe} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Tout champ électrique $\vec{E}$ étant créé par une distribution de charges ponctuelles, **la force électrique $\vec{F}_\text{e} = q\vec{E}$ est conservative**, en tant que somme de forces conservatives.

b Potentiel électrique

E_{pe} étant proportionnelle à q, on définit le potentiel électrique au point M, $V(M)$, comme le rapport de l'énergie potentielle électrostatique d'une charge q située en M, sur q, soit

$$V = \frac{E_{\text{pe}}}{q} \Leftrightarrow \boxed{E_{\text{pe}} = qV}$$ [1]

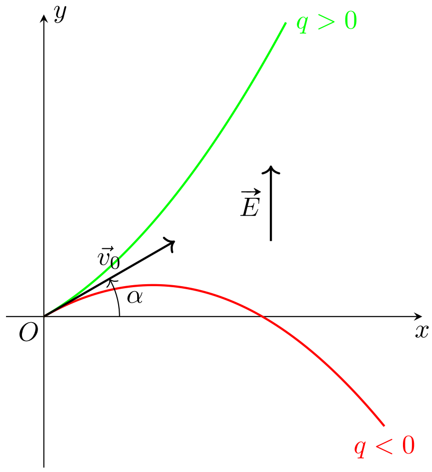
De plus $\vec{F}_{\text{e}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ E_{\text{pe}}$, c'est-à-dire $q\vec{E} = -q\ \overrightarrow{\text{grad}}\ V$, donc $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V, \text{ soit } \mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$

Par conséquent, le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire aux surfaces iso-potentiel et dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

III Mouvement dans un champ électrostatique uniforme

1 Cas général

On considère une particule de charge q, assimilée à un point matériel M de masse m, plongée dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E} = E\vec{u}_y$. La particule est initialement au point O avec un vecteur-vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec $\vec{u}_x$.



Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{e}} = q\vec{E}$

On intègre $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ entre 0 et t : $\displaystyle\int_0^t \vec{a}\mathrm{d}t = \vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \frac{q}{m}t\vec{E}$

On intègre $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ entre 0 et t : $\displaystyle\int_0^t \vec{v}\mathrm{d}t = \overrightarrow{OM}(t) = \frac{qt^2}{2m}\vec{E} + t\vec{v}_0$

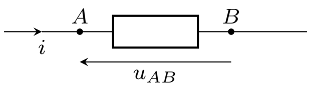
Les coordonnées cartésiennes de M sont donc :

$$\begin{cases} x = v_0\cos(\alpha)t \\ y = \frac{qE}{2m}t^2 + v_0\sin(\alpha)t \end{cases}$$

On en déduit l'équation de la trajectoire : $y = \dfrac{qE}{2mv_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x$.

C'est l'équation d'une parabole dans la direction du champ électrique $\vec{E}$.

1. On peut déduire de l'expression de l'énergie potentielle électrostatique $E_{\text{pe}} = qV$, l'expression de la puissance électrique recue par un dipôle. On considère un dipôle AB, soumis à une tension u_{AB} et parcouru par une intensité i en convention récepteur. Il s'agit d'un système ouvert.



D'après le théorème de l'énergie mécanique, le travail électrique élémentaire recu par le dipôle pendant $\mathrm{d}t$ est la variation infinitésimale d'énergie mécanique contenue dans le dipôle AB. Pendant $\mathrm{d}t$, une charge $i\mathrm{d}t$ entre dans le dipôle par la borne A, au potentiel V_A. Dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, la même charge $i\mathrm{d}t$ sort par la borne B, au potentiel V_B. Pendant $\mathrm{d}t$, il entre donc dans le dipôle une énergie potentielle $i\mathrm{d}tV_A$ et il en sort une énergie potentielle $i\mathrm{d}tV_B$. L'énergie cinétique ne varie pas. Par conséquent,

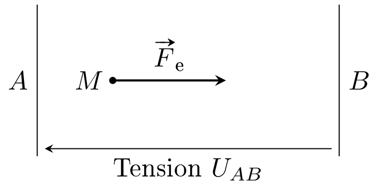
$$\delta W = \mathrm{d}E_{\text{m}} = i\mathrm{d}tV_A - i\mathrm{d}tV_B = i\mathrm{d}tu_{AB}$$

Ainsi, la puissance électrique recue par le dipôle est

$$P = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t} = u_{AB}i$$

2 Accélération par une différence de potentiel

On considère une particule de charge q, assimilée à un point matériel M de masse m, entre 2 électrodes A et B. La particule est émise au niveau de l'électrode A avec une vitesse initiale négligeable. Pour accélérer la particule, la force électrique $\vec{F}_\mathrm{e} = q\vec{E}$ doit être dirigée de A vers B.



— Si $q > 0$, $\vec{E}$ doit être dirigé de A vers B, donc $U_{AB} = V_A - V_B > 0$
— Si $q < 0$, $\vec{E}$ doit être dirigé de B vers A, donc $U_{AB} = V_A - V_B < 0$

On cherche la vitesse de la particule au niveau de l'électrode B. La particule est soumise à la seule force électrique conservative associée à l'énergie potentielle $E_\mathrm{pe} = qV$. On applique le théorème de l'énergie mécanique entre A et B : $E_{\mathrm{m}B} = E_{\mathrm{m}A}$, d'où

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B = qV_A$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2qU_{AB}}{m}}$$

3 Électronvolt

L'électronvolt est défini comme étant l'énergie cinétique acquise par un électron (de charge $-e$) accéléré depuis le repos par une différence de potentiel de 1 V, soit $\boxed{1 \text{ eV} = e \times 1 \text{ V} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}}$

IV Mouvement dans un champ magnétostatique uniforme

On considère une particule de charge q, assimilée à un point matériel M de masse m, plongée dans un champ magnétostatique uniforme $\vec{B}$. Le vecteur-vitesse initial $\vec{v}_0$ est orthogonal à $\vec{B}$.

$\vec{F}_\mathrm{m} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est orthogonale à $\vec{B}$. De plus $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$, donc le mouvement est plan, dans un plan orthogonal à $\vec{B}$.

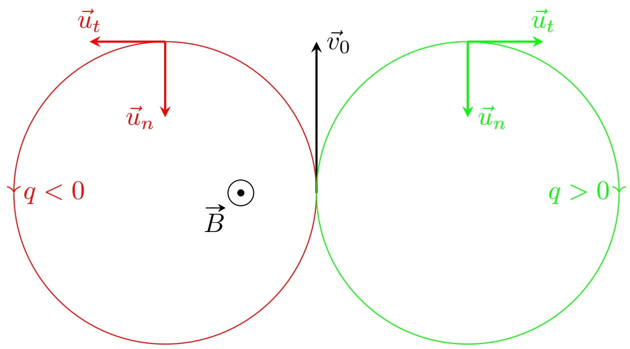
$\vec{F}_\mathrm{m} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est orthogonale à $\vec{v}$, donc $\vec{F}_\mathrm{m}$ ne travaille pas, donc **le mouvement est uniforme** : $v = v_0$.

On utilise la base de Frenet $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$: $\vec{v} = v\vec{u}_t$ et $\vec{a} = \dot{v}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$.
$\vec{F}_\mathrm{m} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = \pm qvB\vec{u}_n$ car $\vec{u}_n$ est orthogonal à $\vec{u}_t$ et $\vec{B}$, mais on ne sait pas dans quel sens est $\vec{u}_n$.

D'après le principe fondamental de la dynamique, $m\vec{a} = \vec{F}_\mathrm{m}$

$$\begin{cases} m\dot{v} = 0 \text{ d'où } v = \text{cste} = v_0 \text{ (on retrouve que le mouvement est uniforme)} \\ \underbrace{m\dfrac{v^2}{R}}_{>0} = \pm qvB = |q|vB \end{cases}$$

Le rayon de courbure $R = \frac{mv_0}{|q|B}$ est constant, donc la trajectoire est **circulaire** de rayon R.
Le sens de rotation dépend du signe de q.



La vitesse de rotation, appelée pulsation cyclotron, est $\Omega = \dfrac{v_0}{R} = \dfrac{|q|B}{m}$.