On considère un point matériel M, astreint à se déplacer sur un axe (Ox), et soumis uniquement à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas.

1 Résultante des forces

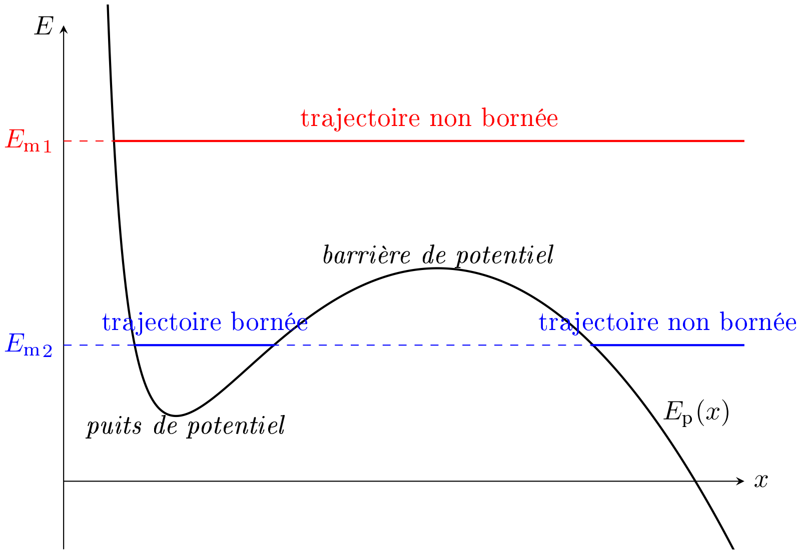
Le mouvement est selon (Ox), donc la somme des forces qui ne travaillent pas ($\perp \vec{u}_x$) est nulle et la résultante des forces s'écrit $\vec{F} = F_x\vec{u}_x$. La résultante des forces est conservative, c'est-à-dire qu'il existe une énergie potentielle E_p telle que $\mathrm{d}E_\mathrm{p} = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, soit $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ E_\mathrm{p}$.

Dans le cas d'un mouvement selon (Ox), cette relation se réduit à $\mathrm{d}E_\mathrm{p} = -F_x\mathrm{d}x$ soit $\boxed{F_x = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}}$.[1]

2 Conservation de l'énergie mécanique

D'après le théorème de la puissance mécanique, $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{m}}{\mathrm{d}t} = \sum_{\vec{F}_\mathrm{nc}} \mathcal{P}(\vec{F}_\mathrm{nc}) = 0$, donc $\boxed{E_\mathrm{m} = \mathrm{cste}}$

3 Analyse du graphe d'énergie potentielle



$E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p}$, or $E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$, donc $E_\mathrm{m} \geq E_\mathrm{p}$. Par conséquent, seules les positions pour lesquelles la droite d'équation $E = E_\mathrm{m}$ est située au dessus de la courbe représentative de l'énergie potentielle d'équation $E = E_\mathrm{p}(x)$, sont accessibles. Aux intersections des 2 courbes $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{p}$, donc $E_\mathrm{c} = 0$, d'où $v = 0$.

4 Positions d'équilibre - Stabilité

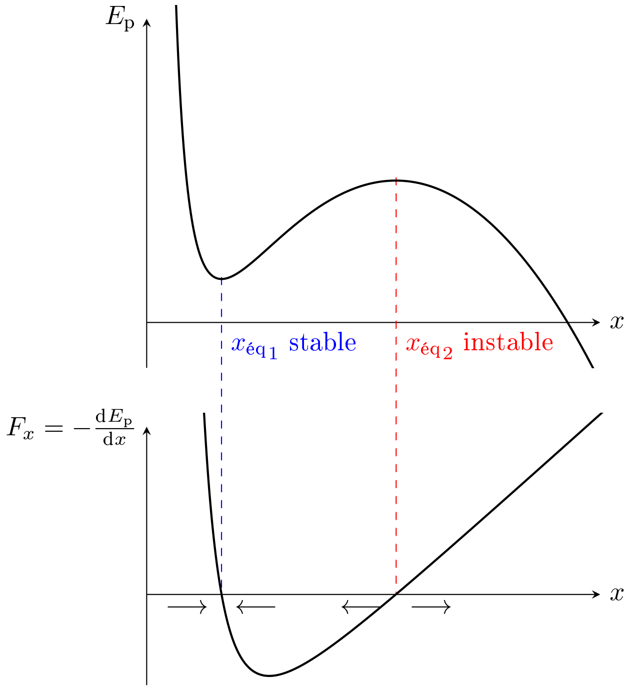
Les positions d'équilibre $x_\text{éq}$ sont telles que $\vec{F}(x_\text{éq}) = \vec{0}$, soit $\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}(x_\text{éq}) = 0$, c'est-à-dire telles que E_p admette un extremum en $x_\text{éq}$.

Une position d'équilibre $x_\text{éq}$ est dite stable, si lorsque le système s'écarte légèrement de $x_\text{éq}$, la résultante des forces qui apparaît le ramène vers $x_\text{éq}$.
On suppose que le point M se situe à la position $x = x_\text{éq} + \varepsilon$ avec ε infinitésimal. On effectue un développement limité de F_x a l'ordre 1 au voisinage de $x_\text{éq}$:

$$F_x(x_\text{éq} + \varepsilon) = \underbrace{F_x(x_\text{éq})}_{0} + \frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x}(x_\text{éq})\varepsilon + o(\varepsilon)$$

- Si $\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x}(x_\text{éq}) > 0$, c'est-à-dire $\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}(x_\text{éq}) < 0$, c'est-à-dire que E_p admet un maximum en $x_\text{éq}$, alors $F_x(x_\text{éq}+\varepsilon)$ et ε sont de même signe, donc $\vec{F}$ écarte davantage le système de sa position d'équilibre : $x_\text{éq}$ est instable.
- Si $\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x}(x_\text{éq}) < 0$, c'est-à-dire $\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}(x_\text{éq}) > 0$, c'est-à-dire que E_p admet un minimum en $x_\text{éq}$, alors $F_x(x_\text{éq}+\varepsilon)$ et ε sont de signes opposés, donc $\vec{F}$ ramène le système vers sa position d'équilibre : $x_\text{éq}$ est stable.

1. Attention, cette relation n'est plus valable pour une coordonnée angulaire. Pour un mouvement circulaire de rayon R par exemple, le point M est repéré par sa coordonnée θ et $\vec{F} = F_\theta\vec{u}_\theta$. On a $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = R\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta$, donc $\mathrm{d}E_\mathrm{p} = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -F_\theta R\mathrm{d}\theta$, d'où $F_\theta = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}\theta}$.

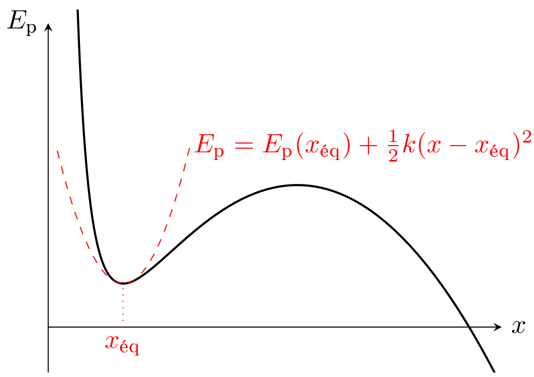


5 Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable

On effectue un **développement limité de E_p à l'ordre 2**, au voisinage de $x_{éq}$, position d'équilibre stable :

$$E_p(x) = E_p(x_{éq}) + \underbrace{\frac{dE_p}{dx}(x_{éq})}_{0}(x - x_{éq}) + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{éq})}_{>0}(x - x_{éq})^2 + o(x - x_{éq})^2$$

On pose $k = \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{éq})$. On peut alors approcher la courbe d'énergie potentielle au voisinage de $x_{éq}$ par un **puits de potentiel harmonique** (parabolique) : $E_p(x) \approx E_p(x_{éq}) + \frac{1}{2}k(x - x_{éq})^2$. [2]



On obtient l'équation du mouvement en appliquant le théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum_{\vec{F}_{nc}} \mathcal{P}(\vec{F}_{nc}) = 0 \text{ avec } E_m = E_c + E_p \approx \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_{éq}) + \frac{1}{2}k(x - x_{éq})^2$$

$$m\dot{x}\ddot{x} + k(x - x_{éq})\dot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}x_{éq}$$

On reconnait l'équation d'un **oscillateur harmonique** de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Les petits mouvements dans un puits de potentiel sont donc sinusoïdaux. Pour des amplitudes plus importantes, pour lesquelles l'énergie potentielle s'écarte significativement de l'approximation harmonique, le mouvement reste périodique, mais non sinusoïdal.

2. On reconnaît l'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k et de longueur à vide $x_{éq}$. Attention néanmoins, si le point M est repéré par une coordonnée angulaire θ, $\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_{éq})$ n'est plus homogène à une raideur.